III. Расчет процентных ставок

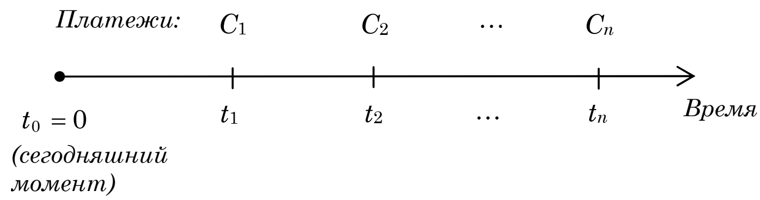
В этой главе вводятся базовые понятия финансовых расчетов по инструментам с фиксированным доходом. Основная практическая задача, рассматриваемая здесь – как, используя доступную рыночную информацию, оценить долговое обязательство, платежи по которому известны с определенностью. Эта задача может иметь различные модификации. Например, из множества доступных для инвестирования инструментов необходимо выбрать наиболее выгодный (наиболее доходный). Либо необходимо определить – по какой цене выгодно купить (продать) данное долговое обязательство. Или необходимо найти существующие на рынке арбитражные возможности – операции, которые могут принести гарантированную положительную прибыль при нулевых затратах.

Для решения перечисленных задач существуют различные методы. Некоторые из них очень просты для применения, но именно в силу этого дают недостаточно точные результаты. Другие гораздо более точны, но требуют более сложных расчетов. В финансовых расчетах, как и в финансах вообще, «не бывает бесплатных пирожных», и в реальности часто необходим компромисс между точностью метода и трудоемкостью его применения.

Данная глава призвана помочь, во-первых, верно интерпретировать информацию, поступающую с рынка. Сложность часто состоит в том, что не различных рынках правила представления информации, в частности - правила расчета рыночных цен и показателей доходности, могут существенно различаться. Поэтому корректная интерпретация рыночных котировок является необходимым условием правильных решений. Во-вторых, обладая информацией о рыночных ценах, необходимо уметь оценить произвольный долговой инструмент, платежи по которому известны с определенностью. Мы увидим, что для решения этой задачи с приемлемой точностью необходимо знать сегодняшнюю кривую доходности – значения процентных ставок для различных сроков погашения, т.к. традиционные рыночные методы, например основанные на показателях доходности к погашению, способны дать лишь приближенное, а значит – не вполне верное решение.

Инструменты с фиксированным доходом

Финансовый инструмент с фиксированным доходом может быть представлен как последовательность платежей $C_1, C_2, \ldots, C_n$, которые будут осуществлены в моменты времени[1] $t_1, t_2, \ldots, t_n$ соответственно:



Цена инструмента с фиксированным доходом P - есть сумма денег, за которую *сегодня* может быть куплено (продано) право собственности на данный поток платежей[2].

[1] Следующее замечание, несмотря на очевидность, является необходимым. Естественно, важно различать понятия *момент времени* и *промежуток времени*. В этой главе все обозначения исходят из того, что *сегодняшний* момент – это момент 0. Тогда *момент* t и *промежуток времени* до момента t – одна и та же величина.

[2] Естественно, на реальном рынке существует определенный спрэд – различие между ценами *покупки* и *продажи*. Чем более ликвидным является рынок – тем меньше величина спрэда.

В настоящей главе рассматривается случай с *детерминированными* платежами, когда инструмент с фиксированным доходом - это долговое обязательство, покупатель которого (кредитор), инвестируя *сегодня* сумму денег P, взамен получает право на получение от заемщика *фиксированных платежей в определенные будущие моменты времени*. Далеко не все долговые обязательства в реальности обладают такими свойствами. В общем случае размеры выплат $C_1, C_2, \ldots, C_n$, равно как и моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$, не обязательно являются заранее известными, и могут зависеть от случайных факторов - это относится к обсуждавшимся в Главе 1 инструментам с плавающей ставкой, встроенными опционами, и др. Для оценки инструментов с неопределенными платежами необходим аппарат моделей временной структуры процентных ставок и оценки опционов, обсуждаемый в последующих главах.

Фактор времени

Способ измерения времени играет существенную роль в финансовых расчетах. *Дискретное время* означает, что временной промежуток всегда состоит из *целого* числа элементарных периодов (дней, недель, месяцев). В случае *непрерывного времени* выбирается единица измерения (чаще всего - *один год*), но временным интервалом может быть любое действительное число. Помимо того, *как измеряются* промежутки времени, важно *как выплачивается* (или *начисляется*) доход по долговому обязательству - дискретно или непрерывно. В реальности доход всегда выплачивается дискретно - в определенные *моменты* времени. Однако, непрерывное начисление дохода - удобная абстракция, широко используемая, например, в теориях временной структуры процентных ставок и моделях оценки производных инструментов. Непрерывное начисление дохода означает, что выплаты осуществляются и, что не менее важно, *могут быть реинвестированы* непрерывно. В таблице 3.1 приведены области применения различных способов измерения времени в финансовых расчетах. Подчеркнем – речь здесь идет лишь о *способах расчета*, а не об условиях финансовых соглашений.

Как видно из таблицы, в теоретических моделях и основанных на этих моделях практических приложениях подход к измерению времени всегда последователен - либо дискретный (и для интервалов времени, и для периодичности начисления и реинвестирования доходов), либо непрерывный. На реальных рынках при расчете показателей доходности долговых инструментов, единицей измерения времени практически всегда выступает *один год*, но длительность интервалов времени измеряется с точностью до *одного дня* - т.е. по сути время непрерывно, в то время как выплаты осуществляются и могут быть реинвестированы лишь дискретно.

Таблица 3.1. Способы измерения времени в финансовых расчетах

Промежутки времени:	*Начисление (реинвестирование) дохода:* Дискретное: выплаты осуществляются в определенные моменты времени	Непрерывное: доход начисляется и реинвестируется непрерывно
Дискретные (интервал времени - целое число)	Дискретные модели временной структуры; Численные методы оценки опционов	Не применяется
Непрерывные (интервал времени - любое действительное число)	Рыночные методы расчета процентных ставок (доходности долговых обязательств)	Непрерывные модели временной структуры; Модели оценки опционов (явные решения)

Простые дисконтные облигации

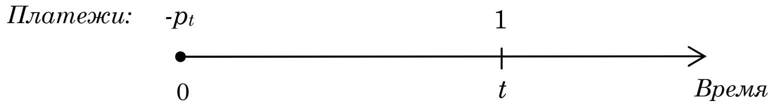
Объект торговли на рынках долговых обязательств - будущие деньги. Удобным базовым понятием для выражения *цен* этой торговли, является *простая дисконтная облигация*. Простая дисконтная облигация - гипотетический финансовый инструмент, владелец которого через время t (момент t назовем *временем погашения* облигации) гарантировано[3] получит одну денежную единицу (например, 1 гривну). Простые дисконтные облигации - универсальное средство для выражения цен межвременной торговли (стоимости денег во времени), представляющее собой своего рода «атомы», из которых состоят другие объекты торговли на рынке заемных средств.

Предположим, что на рынке обращаются безрисковые простые дисконтные облигации со всеми возможными сроками погашения[4]. Рыночную цену простой дисконтной облигации со сроком погашения t обозначим p_t. Тем самым, инвестирование в одну простую дисконтную облигацию сводится к обмену сегодняшних p_t гривен на *одну* гривну, выплачиваемую через t периодов:

---

[3] До определенного момента наличие кредитного риска (риска неплатежа) игнорируется, т.е. рассматриваются исключительно безрисковые долговые инструменты.

[4] Естественно, в реальности такого рынка не существует. Далее (в этой и последующей главах) будут рассмотрены методы определения цен простых дисконтных облигаций на основании данных о рыночных ценах реальных долговых инструментов.



Цены простых дисконтных облигаций подчиняются следующим простым свойствам:

1) $p_0 = 1$, т.е одна сегодняшняя гривна стоит одну гривну:

2) $p_{t_2} < p_{t_1}$ если $t_2 > t_1$, т.е. сегодняшняя денежная единица всегда дороже денежной единицы, получаемой в будущем. Это условие означает невозможность отрицательных значений рыночных процентных ставок.

Линейность цен, арбитражные возможности и оценка инструментов с детерминированными платежами

Величина p_t, как она была определена выше, - это просто рыночная *цена* одной будущей денежной единицы, получение которой гарантировано. Ценообразование на финансовом рынке является *линейным*, если, при условии, что цена одной будущей гривны составляет p_t, цена *произвольной* суммы денег размером C гривен, гарантированно выплачиваемой через тот же промежуток времени, равна $p_t C$. Величина p_t в данном случае является *коэффициентом дисконтирования*[5].

Линейность цен означает, что любой инструмент с фиксированными платежами может быть представлен как совокупность (портфель) простых дисконтных облигаций. Владеть инструментом, который обеспечивает выплаты C_1, C_2, ..., C_n в моменты времени t_1, t_2, ..., t_n, эквивалентно владению C_1, C_2, ..., C_n *штук* простых дисконтных облигаций со сроками погашения t_1, t_2, ..., t_n соответственно.

Если p_t - рыночные цены, то линейность ценообразования означает, что цена P *любого* безрискового инструмента с детерминированными платежами (поток C_1, C_2, ..., C_n в моменты t_1, t_2, ..., t_n) может быть представлена как:

$$P = \sum_{j=1}^{n} p_{t_j} C_j \,. \qquad (3.1)$$

[5] Цена простой дисконтной облигации есть *рыночная стоимость* одной будущей денежной единицы, тогда как коэффициент дисконтирования мы будем понимать как сумму денег, наличие которой сегодня *эквивалентно* наличию одной денежной единицы в будущем. Понятия *стоимости* и *эквивалентной суммы денег* равнозначны только в детерминированном случае. Если процентные ставки колеблются случайным образом (см. Главу 7), то стоимость простой дисконтной облигации есть ожидаемое значение коэффициента дисконтирования (по нейтральной к риску вероятностной мере).

Если фактическая рыночная цена отклоняется от величины определенной в соответствии с (3.1), на рынке существуют *арбитражные возможности* - при нулевых инвестициях может быть получен положительный доход. Этого можно достичь покупая недооцененные рынком инструменты и одновременно продавая переоцененные[6].

Для дискретного времени (когда t_1=1, t_2=2, ..., t_n=n) формула (3.1) запишется как:

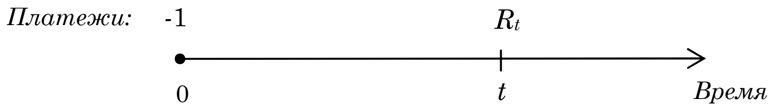
$$P = \sum_{j=1}^{n} p_j C_j \ . \tag{3.2}$$

Выражение (3.1) (формула (3.2) - его частный случай) имеет фундаментальное значение в финансах: зная цены простых дисконтных облигаций, можно *оценить* (определить не допускающее арбитража значение цены) *любого инструмента с детерминированными платежами*.

Спот-ставки

Ставки доходности (процентные ставки) являются общепринятым способом выражения *цен межвременной торговли*.

Валовой доходностью R_t назовем совокупный доход, получаемый инвестором от вложений в простые дисконтные облигации сроком t периодов, в расчете на одну единицу инвестиций:



Валовая доходность и цена простой дисконтной облигации связаны простой зависимостью:

$$p_t \equiv \frac{1}{R_t} \text{ или } R_t \equiv \frac{1}{p_t} . \tag{3.4}$$

Чистой доходностью, или *ставкой спот* сроком t периодов назовем величину чистого дохода по простой дисконтной облигации *в среднем за период* с учетом *эффекта сложных процентов*. Другими словами, ставка спот r_t - есть *средний темп прироста* стоимости вложенных средств в расчете на

[6] Строго говоря, для того, чтобы можно было реализовать эти возможности, транзакционные издержки (в данном случае - затраты связанные с выполнением сделок и разница цен покупки и продажи) должны быть пренебрежимо малы.

один период, при условии, что средства инвестированы в простую дисконтную облигацию погашаемую в момент t:

$$(1+r_t)^t \equiv R_t,\ \ (1+r_t)^{-t} \equiv p_t. \tag{3.5}$$

Ставки спот являются более удобным, по сравнению с ценами простых дисконтных облигаций, способом выражения цен будущих денег, так как приводят к общему измерению (чистый доход в процентах за период) инвестиции с различным сроком. Спот-ставки в детерминированном случае являются ставками дисконтирования в том смысле, что сегодняшняя стоимость произвольного денежного потока C, выплачиваемого через время t может быть представлена как $C(1+r_t)^{-t}$.

Пример 3.1. Расчет спот-ставок

Пусть рассматривается простая дисконтная облигация сроком погашения 3 периода, которая продается на рынке по цене $p_3 = 0{,}85$ грн., т.е. содержание сделки состоит в обмене сегодняшних 0,85 грн. на 1 грн. через 3 периода. Валовая доходность данной облигации, в соответствии с (3.4), равна:

$$R_3 = 1/p_3 = 1.1756.$$

Смысл величины R_3 - валовый доход, получаемый инвестором через три периода, в расчете на каждую инвестированную гривну.

Ставка спот (чистая доходность простой дисконтной облигации), исходя из (3.5), равна 0,0556672 (5.57% за период):

$$r_3 = (p_3)^{1/3} - 1 = 0.85^{-1/3} - 1 = 0.0556672.$$

Величине r_3 также можно дать ясную интерпретацию: инвестирование в данные облигации эквивалентно размещению средств на депозите сроком три периода, по которому каждый период начисляется 5,57% от суммы вклада на начало периода, причем инвестор не изымает средства с депозита (реинвестируя начисляемые проценты). Другой вариант интерпретации величины 5,57% - это *средний темп прироста* инвестированных средств (процентов за один период).

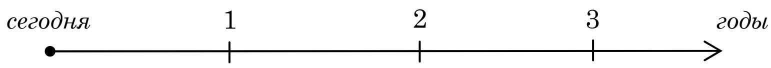
Определение спот-ставок на основании рыночной информации

На реальном рынке не существует дисконтных инструментов (или других долговых обязательств с единственным платежом) *для всех возможных сроков погашения*. Инструменты со средними и длинными сроками погашения как правило предполагают промежуточные выплаты. Тем не менее, на основании рыночных цен таких обязательств могут быть вычислены спот-ставки. Простейший подход называют *цепным методом расчета ставок спот*. Пример 3.2 иллюстрирует применение метода.

Цепной метод расчета ставок спот служит скорее иллюстративным целям - на реальном рынке, как правило, не существует достаточного количества ликвидных инструментов, сроки выплат по которым совпадают. Практические методы оценки значений коэффициентов дисконтирования и спот-ставок рассматриваются в следующей главе.

Пример 3.2. Цепной метод расчета спот-ставок

Пусть на рынке происходит торговля облигациями сроком погашения 1 (облигация *A*), 2 (облигация *B*) и 3 года (облигация *C*). Первая облигация - дисконтная, остальные - купонные с выплатой купона один раз в году. Номинальная стоимость всех облигаций - 100 гривень. Купон по облигации *B* равен 10 гривень, по облигации *C* - 15 гривень. Рыночные цены равны 90, 85 и 80 грн. соответственно, т.е. денежные потоки при покупке одной облигации каждого вида можно представить следующим образом (по купонным облигациям при погашении выплачивают последний купон и номинальную стоимость):



Облигация *A*	-90	100		
Облигация *B*	-85	10	110	
Облигация *C*	-80	15	15	115

Проще всего рассчитать ставку спот сроком один год (90 грн. - это сегодняшняя цена 100 грн., которые будут выплачены через один год):

$p_1 = 100/90 = 0.9$ грн., откуда $r_1 = 1/p_1 - 1 = 0.1111 \equiv 11.11\%$ годовых.

Для получения ставок спот сроком два и три года, расчитаем вначале цены простых дисконтных облигаций (коэффициенты дисконтирования). Рыночные цены облигаций *B* и *C* равны сегодняшней стоимости выплат, т.е.:

$$85 = p_1 \times 10 + p_2 \times 110\ ,$$

$$80 = p_1 \times 15 + p_2 \times 15 + p_3 \times 115\ .$$

Зная p_1, вначале из первого уравнения получим, что p_2=0.6909 грн., затем, подставляя данное значение во второе уравнение, вычислим p_3=0.4881 грн. Зная коэффициенты дисконтирования, ставки спот вычисляются с использованием формуы (3.5):

$$r_2 = (p_2)^{-1/2} - 1 = 0.6909^{-1/2} - 1 = 20.31\%\ ,$$

$$r_3 = (p_3)^{-1/3} - 1 = 0.4881^{-1/3} - 1 = 27.01\%\ .$$

Простые и эффективные ставки

Для избежания путаницы в финансовых расчетах, важно точно различать понятия *простых* (или *номинальных*) и *эффективных* ставок. Условия финансовых соглашений (процентные ставки по кредитам и депозитам, купонные ставки по облигациям, и т.д.) формулируют в терминах простых ставок (в этом случае говорят еще об *объявленной* ставке). Например, ставка

20% годовых по депозиту означает, что начисляемый процент в годовом измерении составляет 20% от суммы вклада (т.е., например, 20 копеек на каждую вложенную гривну). Но для того чтобы оценить эффективность финансового соглашения, недостаточно знать только лишь значение номинальной ставки - имеют значение сроки и структура платежей во времени. Для оценки и сравнения эффективности различных вариантов долговых соглашений более подходящим показателем является *эффективная ставка*. В отличие от простой, эффективная ставка - это чистый доход на единицу вложенных средств, который будет получен за один период (как правило, один год), если получаемые выплаты будут на протяжении года реинвестированы на тех же условиях. Тем самым, эффективная ставка учитывает сроки и структуру выплат (чем в более ранние сроки и чем чаще осуществляются выплаты - тем больший доход от реинвестирования будет получен) - по сути, приводя *к одному измерению* инструменты с различными сроками и структурой платежей.

Если по упомянутому выше депозиту (объявленная ставка - 20%) доход *выплачивается* только в конце года, простые и эффективные ставки совпадают, т.к доход от реинвестирования отсутствует. Но если начисление процентов происходит чаще, эффективная ставка окажется выше простой за счет дополнительного дохода от реинвестирования промежуточных выплат. Пусть при ставке $i = 20\%$ доход выплачивается ежеквартально, т.е. в конце каждого квартала выплачивают 5% от суммы вклада, существовавшего на начало квартала. Если промежуточные доходы реинвестируются под те же 5% за квартал, чистый доход на 1 инвестированную гривню к концу года составит $(1+0{,}05)^4 - 1 = 0{,}2155$ грн. или 21,55% годовых.

В целом, если объявленная ставка равна i процентов годовых, а доход выплачивается m раз в год равными частями через равные промежутки времени, связь между простой (i) и эффективной (r) ставками можно выразить с помощью соотношений:

$$r = (1 + i/m)^m - 1\,,\ \ i = m\left[(1 + r)^{1/m} - 1\right]. \qquad (3.6)$$

Число m здесь характеризует периодичность начисления сложного процента ($m = 1$ означает годовой сложный процент, $m = 2$ - полугодовой, $m = 4$ - квартальный, и т.д.).

Ставки с непрерывным сложным процентом

В непрерывном времени для измерения доходности более естественно использовать ставки *с непрерывным сложным процентом*. Ставкой спот с непрерывным сложным процентом назовем число x_t, удовлетворяющее соотношению $p_t = e^{-x_t \cdot t}$, т.е.:

$$x_t = -\frac{1}{t}\ln p_t\,, \tag{3.7}$$

где p_t - цена простой дисконтной облигации с погашением через t периодов. Ставки с непрерывным (x_t) и дискретным (r_t) сложным процентом связаны простыми соотношениями:

$$r_t = e^{x_t} - 1\,,\ x_t = \ln(1 + r_t)\,. \tag{3.8}$$

Смысл ставки с непрерывным сложным процентом можно объяснить так: x_t - это такое значение *простой* ставки, при которой, если проценты выплачиваются и реинвестируются *непрерывно*, чистый доход на единицу инвестиций к концу года составит $e^{x_t} - 1$. Фактически, (3.8) - это предельный случай формул (3.6) при $m \to \infty$.

Пример 3.3. Эффективная доходность

Рассмотрим приведенный в тексте пример с депозитом, по которому начисляется 20% годовых. Чем чаще начисляются проценты, тем большим будет доход инвестора в течение года. Если проценты начисляются один раз в год, доход на одну гривну составит к концу года 1 грн. 20 коп. Но при начислении процентов раз в полгода (10% каждые шесть месяцев) доход будет уже 1,1×1,1=1,21 грн., что соответствует эффективной ставке 21% годовых. При ежеквартальном начислении процентов (5% в квартал) доход составит 1,054=1,2155 грн. или 21,55% годовых. Эффективная доходность при других вариантах периодичности начисления процентов приведены в таблице:

Период сложного процента (*m*)	Эффективная доходность (% годовых)
1	20,00
2	21,00
4	21,55
12	21,94
52	22,09
365	22,13
непрерывный (∞)	22,14

Ставки с дискретным и непрерывным сложным процентом представляют собой различные способы измерения стоимости денег во времени. Одну и ту же цену простой дисконтной облигации p_t можно выразить в виде простой ставки i_t, эффективной ставки r_t или ставки с непрерывным сложным процентом x_t:

$$p_t = (1 + i_t t)^{-1} = (1 + r_t)^{-t} = e^{-x_t t}\,, \tag{3.}$$

Мгновенная ставка

В моделях структуры процентных ставок во времени важную роль играет ставка с наиболее близким к сегодняшнему дню сроком. Например, именно эту ставку удобно рассматривать как основной случайный фактор, влияющий на все рыночные процентные ставки. В непрерывном времени используют понятие мгновенной ставки – процентной ставки с бесконечно малым сроком погашения ($t \to 0$). Мгновенная ставка здесь и далее обозначается как r или x , иак как значение мгновенной ставки не зависит от способа расчета:

$$\lim_{t \to 0} r_t = \lim_{t \to 0} x_t = \lim_{t \to 0} i_t = r \equiv x \, .$$

В дискретном времени ставку с наиболее близким к сегодняшнему дню сроком погашения (один период) будем называть коаткосрочной ставкий и обозначать r_1. Так как на реальном рынке не существует инструментов с бесконечно малым сроком погашения, то в практических задачах в качестве мгновенной ставки часто рассматривается именно краткосрочная ставка.

Инфляция: ставки в номинальном и реальном выражении

Процентные ставки на рынке всегда имеют денежное (номинальное) выражение - это *денежный* доход на единицу вложенных средств. Но реальная стоимость (покупательная способность) денег со временем меняется вследствие изменения уровня цен реальных благ. Поэтому инвестора в первую очередь может интересовать не денежный доход, а то количество реальных благ, которое может быть приобретено за эти деньги.

Если рыночные ставки имеют денежное измерение, то *реальная процентная ставка* измеряется в единицах реальных благ. Пусть доходность вложений инвестора на протяжении года составила r процентов годовых (т.е., например, r гривень чистого дохода на одну инвестированную гривню). В то же время, потребительская корзина[7] в начале года стоила Π_0 грн., а к концу года - Π_1 грн. Для удобства примем $\Pi_0 = 1$, тогда $\Pi_1 = 1 + \pi$, где π - прирост уровня цен за период (*темп* инфляции[8]). Реальная процентная ставка (обозначим ее ρ) - есть чистый удельный доход, выраженный в единицах реальных ресурсов (в нашем случае - в количестве потребительских корзин):

[7] Индекс потребительских цен (относительная стоимость фиксированной корзины товаров и услуг) - далеко не единственный показатель, измеряющий изменения уровня цен (инфляцию), но в данном контексте - наиболее приемлемый

[8] Величина π может быть как положительной, так и отрицательной, последнее означает снижение уровня цен (дефляцию).

$$\rho = \frac{1+r}{1+\pi} - 1 = \frac{r-\pi}{1+\pi} \qquad (3.9)$$

Формула (3.9) справедлива для случая дискретного начисления процентов. Если обозначить через π_x экспоненциальный темп прироста уровня цен: $\pi_x = \ln(1+\pi) = \ln \Pi_1 - \ln \Pi_0$, а через $\rho_x = \ln(1+\rho)$ - реальную ставку с непрерывным начислением процентов, то прологарифмировав выражение (3.9), получим, что в этом случае реальная процентная ставка равна просто разнице между номинальной $x = \ln(1+r)$ и темпом инфляции:

$$\rho_x = x - \pi_x \qquad (3.10)$$

Пример 3.4 Расчет реальной процентной ставки

Пусть эффективная доходность вложений в некоторый финансовый инструмент составила $r = 20\%$ годовых. Уровень цен в том же периоде рос в среднем на $\pi = 10\%$ в годовом измерении. Это означает что реальная доходность вложений составила согласно формуле (3.9)

$\rho = (1+0{,}2)/(1+0{,}1) - 1 = 0.0909 \equiv 9{,}09\%$ годовых.

Перейдем к ставкам с непрерывным начислением дохода: $x = \ln(1+0{,}2) = 18{,}23\%$, $\pi_x = \ln(1+0{,}1) = 9{,}53\%$ годовых, т.е. реальная ставка в соответствии с формулой (3.10) равна

$\rho_x = 18{,}23\% - 9{,}53\% = 8{,}57\%$.

Полученные ставки ρ и ρ_x описывают один и тот же, просто измеренный различными способами, уровень реальной доходности, поскольку $\ln(1+0{,}0909) = 0{,}087$.

Доходность к погашению

Доходность к погашению (*yield to maturity*, *YTM*) - общепринятый показатель для измерения удельного дохода по инвестициям в долговые обязательства. Доходность к погашению (или, что то же самое, *внутренняя норма доходности*) - это такое *единственное* значение ставки дисконтирования, при котором сегодняшняя стоимость платежей, обеспечиваемых *данным инструментом*, равняется его рыночной цене. Если инструмент, рыночная цена которого равна *P*, обеспечивает платежи $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в моменты времени 1, 2, ..., *n* (дискретное время), то доходность к погашению - это значение *y*, которое является решением уравнения:

$$P = \sum_{t=1}^{n} (1+y)^{-t} C_t \ . \qquad (3.11)$$

Величина *y*, полученная как решение уравнения (3.11) - это доходность *за один период*. Если продолжительность периода времени между платежами меньше года, ее необходимо привести к годовому измерению. Это может быть сделано несколькими способами. Годовая доходность может рассчитываться как ставка с определенным периодом начисления сложного процента (обозначим ее $y_{(m)}$, где m - количество периодов в году; как правило, периодичность сложного процента соответствует периодичности платежей): $y_{(m)} = y \times m$. На многих рынках именно такой способ используют для расчета доходности облигаций. Другой способ - годовая доходность может расчитываться как эффективная годовая ставка с годовым сложным процентом:

$$y_e = (1+y)^m - 1. \tag{3.12}$$

Рассмотрим более общий случай, когда время непрерывно, а платежи не обязательно осуществляются через равные промежутки времени. Пусть по долговому обязательству будут выплачены суммы $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Величины $t_j, j = 1,...,n$ - это *количество лет* от сегодняшнего дня ($t_0 = 0$) до *j*-го платежа. Доходность к погошению, как и ранее, может расчитываться как ставка с определенной периодичностью начисления сложного процента, тогда это будет решение относительно $y_{(m)}$ уравнения:

$$P = \sum_{j=1}^{n} (1 + y_{(m)} / m)^{-mt_j} C_j, \tag{3.13}$$

либо как эффективная ставка ($m = 1$) y_e из уравнения:

$$P = \sum_{j=1}^{n} (1 + y_e)^{-t_j} C_j. \tag{3.12}$$

Предельным случаем номинальной ставки (при $m \to \infty$) является доходность с непрерывным сложным процентом y_x:

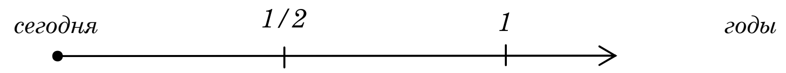
$$P = \sum_{j=1}^{n} \exp(-y_x t_j) C_j. \tag{3.14}$$

Выбор того или иного способа расчета доходности к погашению определяется задачей, которую необходимо решить. Например, на рынке может быть принят определенный способ расчета, и для правильного взаимопонимания между участниками рынка необходимо использовать именно этот способ. В то же время, доходность к погашению - это показатель, предназначенный прежде всего для того, чтобы привести к одному измерению цены долговых обязательств (например, для сравнения эффективности инвестиций в различные инструменты). Для того, чтобы сравнение разных инструментов было корректным, необходимо использовать один и тот же способ расчета.

Между рыночной ценой и (расчитанной тем или иным способом) доходностью к погашению долгового обязательства существует однозначная взаимосвязь (при неизменности платежей $C_1, C_2, \ldots, C_n$), что позволяет говорить о доходности к погашению как о *способе представления рыночной цены финансового инструмента*. Важно подчеркнуть различие между понятиями доходности к погашению и ставки спот. Спот-ставка есть выражение цены будущей *денежной единицы*, тогда как доходность к погашению характеризует цену *определенного финансового инструмента*. В то же время, если это инструмент *с единственным платежом* (например, дисконтная облигация), его доходность к погашению, расчитанная по текущей рыночной цене, сложившейся на ликвидном рынке, является одновременно спот-ставкой для соответствующего срока.

Пример 3.5 Сравнение доходности инструментов с разной финансовой структурой

Пусть рассматривается две облигации - *X* и *Y*. Облигация *X* - дисконтная, погашаемая ровно через полгода, номинал - 100 грн., цена - 90 грн.. Облигация *Y* - купонная, погашается через один год, номинал также равен 100 грн., цена - 91,50 грн., купонные платежи в размере 6 грн. каждый будут выплачены через полгода и через год (при погашении):



Облигация *X*	-90,0	100	
Облигация *Y*	-91,5	6	106

Предположим, что для дисконтных облигаций рыночными соглашениями предусмотрен расчет *простой* ставки доходности, тогда как для купонных расчитывается *эффективная* ставка (годовая ставка с годовым сложным процентом). Тогда согласно рыночной информации доходность облигации *X* равняется 22,22% годовых (решение уравнения (3.9), умноженное на 2), а доходность облигации *Y* составляет 23,12% годовых (решение (3.9) приведено к эффективному измерению согласно (3.9); либо, что то же самое, эффективная ставка для *Y* расчитана как решение уравнения (3.12)). Означает ли эта информация, что доходность *Y* выше, чем доходность *X*? Нет, потому что ставки расчитаны разными способами. Для сравнения доходностей необходимо использовать одинаковый метод расчета. Доходность облигаций *X* и *Y* (в процентах годовых), расчитанная тремя разными способами, приведена в таблице:

Способ расчета	*Доходность облигации X*	*Доходность облигации Y*
Доходность с полугодовым сложным процентом ($m = 2$), $y_{(2)}$	22,22	21,92
Эффективная доходность (годовой сложный процент), y_e	23,46	23,12

Доходность с непрерывным сложным процентом ($m \to \infty$), y_x	21,07	20,80

Таким образом, независимо от выбора способа расчета, у облигации *X* по сравнению с *Y* доходность к погашению выше (а относительная цена, соответственно, ниже).

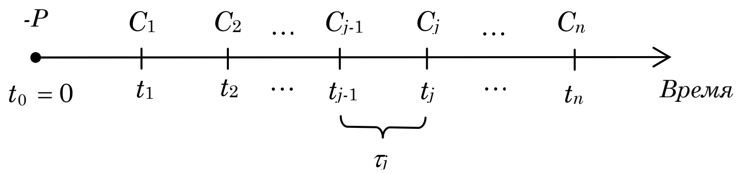
Доходность к погашению измеряет *темп прироста стоимости* инвестиций в данный процентный инструмент (в процентах за период), однако в действительности данная величина не является показателем фактической доходности инструмента - т.е. того, на сколько *на самом деле* будет прирастать стоимость инвестированных средств.. Точнее говоря, доходность к погашению равна *фактической* доходности при двух условиях: (1) промежуточные платежи реинвестируются на таких же условиях и по ставке, равной доходности к погашению, и (2) горизонт инвестора (время на которое он вкладывает деньги и за которое измеряет доходность) равняется времени до погашения данного инструмента.

Доходность купонных облигаций

Способы расчетов по облигациям для целей *торговли* могут на каждом рынке иметь свои особенности, объясняемые сложившимися традициями, правилами торговли, рыночными соглашениями или нормативным регулированием.

Введем следующие обозначения: N - номинальная стоимость облигации (основная сумма долга, выплачиваемая в момент погашения), P – текущая рыночная цена (сумма, фактически выплачиваемая покупателем продавцу), C_j - объем j-го платежа, n - количество платежей до момента погашения m - количество выплат в году, K - *котировка* (*курс*) облигации, которая в силу ряда причин может отличаться от фактической цены, уплачиваемой покупателем продавцу. K - это, как правило, цена за сто денежных единиц номинальной стоимости облигации, независимо от того, чему на самом деле равен ее номинал. В дальнейшем для упрощения записи будем игнорировать это различие, считая, не уменьшая общности, что номинальная стоимость всегда равна 100 денежным единицам.

Инвестирование в облигацию с фиксированным купоном описывается потоком платежей:



Купонная ставка i - это номинальный процент, выплачиваемый в виде купонов на единицу номинальной стоимости в течение года. Объемы платежей C_j как правило определяются как

$$C_j = i \times N \times \tau_j \text{, для } j = 1,\ldots,n-1$$

$$C_n = i \times N \times \tau_n + N \text{,}$$

где τ_j - количество *лет* между выплатами.

Самым простым (и, по этой причине, очень удобным, хотя и неточным) индикатором доходности купонной облигации является *текущая доходность* (*current yield*), рассчитываемая как объем купонных платежей в годовом измерении, деленный на рыночную цену. Если купонная ставка фиксирована и неизменна, формулу для расчета текущей доходности можно записать как iN/P, данная величина является, по существу *простой* (не учитывающей эффект реинвестирования) доходностью облигации. Показатель доходности к погашению существенно более точен по сравнению с текущей доходностью, т.к. учитывает структуру платежей во времени, и соответственно - возможность получения доходов от реинвестирования купонных выплат.

Если от сегодняшнего дня до следующей купонной выплаты остался *ровно один* купонный период, время (приближенно) можно считать *дискретным* - продолжительность одного временного периода равна промежутку между купонными выплатами, *взаимосвязь доходности к погашению и цены* описывается соотношением (3.11)

$$P = K = \sum_{j=1}^{n} (1+y)^{-j} C_j \,. \tag{3.17}$$

В случае, когда купонные платежи равны между собой, т.е. $C_j = c$ для $j = 1,\ldots,n-1$, $C_n = c + N$, используя формулу аннуитета (суммы геометрической прогрессии) взаимосвязь цены и доходности может быть представлена

$$P = K = c\left(\frac{1-(1+y)^{-n}}{y}\right) + (1+y)^{-n} N \,. \tag{3.17'}$$

Доходность к погашению, полученная из (3.17), является доходностью *за один купонный период*. Годовую ставку как правило получают умножая y на количество купонных периодов в году ($y \times m$).

Накопленный купонный доход

Если до следующей купонной выплаты осталось *менее*, чем один купонный период, между рыночной ценой и курсом облигации возникает разница на величину *накопленного процента*[9] (или *накопленного купонного дохода*). Это различие вызвано, как минимум, двумя причинами: (1) необходимостью избежать резких колебаний котировок в момент выплаты купона (рыночная цена непосредственно перед купонной выплатой и непосредственно после нее будет отличаться ровно на величину купона – см. Рис. 3.1), и (2) бухгалтерской необходимостью учитывать отдельно процентный и капитальный доход, т.к., к примеру, ставки налогообложения по ним могут быть различны.

Связь между рыночной ценой и курсом можно записать как

$$P = K + A \text{, или } K = P - A \text{,} \tag{3.20}$$

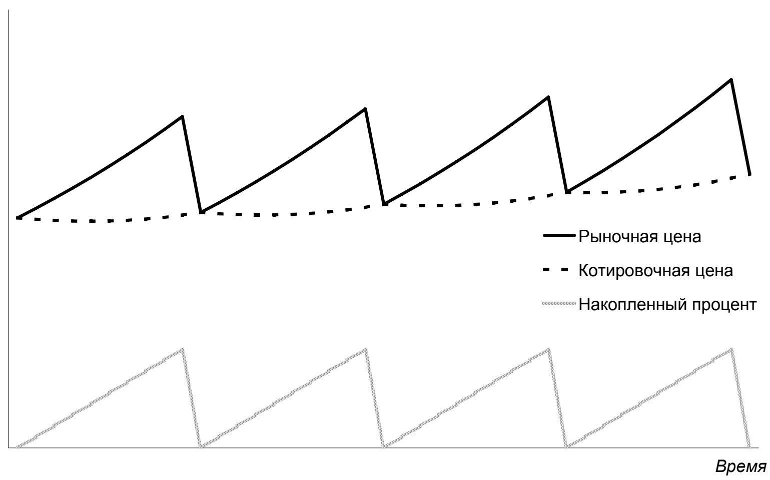


Рис. 3.1. Изменение цены облигации со временем (при условии, что доходность к погашению не меняется)

[9] *Accrued interest.*

где A - накопленный купонный доход, вычисляемый на большинстве рынков[10] по формуле:

$$A = i \times N \times (T_c - T) / T_c , \tag{3.21}$$

где T - количество дней до следующей купонной выплаты, T_c - количество дней в одном купонном периоде, i - купонная ставка. Накопленный процент можно интерпретировать как долю следующей купонной выплаты, которая принадлежит продавцу облигации. Доходность к погашению в данном случае будет решением уравнения

$$P = K + A = C_j \sum_{j=1}^{n} (1 + y)^{-(j+\upsilon-1)} , \tag{3.22}$$

где $\upsilon = T / T_c$. На отдельных рынках могут существовать свои особенности расчета доходности к погашению – например, в отношении правил подсчета количества дней (см. ниже). Доходность к погашению может рассчитываться, например, как эффективная ставка y_e (т.е. годовая доходность с годовым периодом сложного процента - см. Пример 3.6):

$$P = \sum_{j=1}^{n} (1 + y_e)^{-t_j} C_j , \tag{3.18}$$

Пример 3.6 Расчет доходности к погашению облигаций федерального займа (Россия)

Ниже приведены данные об итогах торгов облигациями Российской Федерации на Московской межбанковской валютной бирже (ММВБ) за 7 сентября 2001 г.

Код	Тип	Погашение	Купон (% год.)	Погашение купона	Цена (% от ном.)	Доходность (% год.)
25023	ОФЗ-ПД	12.09.01	14	12.09.01	100,02	12,46
21150	ГКО	14.11.01	-	-	97,79	12,13
21152	ГКО	28.11.01	-	-	97,35	12,12
27001	ОФЗ-ФК	6.02.02	15	8.11.02	100,58	14.09
27003	ОФЗ-ФК	5.06.02	15	5.12.01	100,77	14,42
27004	ОФЗ-ФК	18.09.02	20	19.09.01	100,89	14,87
27006	ОФЗ-ФК	22.01.03	15	24.10.01	98,38	15,31
27007	ОФЗ-ФК	5.02.03	15	8.11.01	97,91	15,78
27008	ОФЗ-ФК	21.05.03	15	21.11.01	96,59	16,03
27009	ОФЗ-ФК	4.06.03	15	5.12.01	96,93	15,80
27010	ОФЗ-ФК	17.09.03	20	19.09.01	95,84	16,08
27011	ОФЗ-ФК	8.10.03	15	10.10.01	93,00	17,15
28001	ОФЗ-ФК	21.01.04	15	24.10.01	90,50	17,90
27015	**ОФЗ-ФК**	**4.02.04**	**16**	**8.11.01**	**93,06**	**17,87**

[10] Правила расчета накопленного процента в разных странах могут несущественно различаться, например, способом вычисления длительности промежутков времени.

26002	ОФЗ-ПД	15.03.04	10	15.03,02	83,80	18,50
27013	ОФЗ-ФК	2.06.04	16	6.03.02	92,52	17,77
27014	ОФЗ-ФК	15.12.04	16	19.10.01	91,79	17,45
26003	ОФЗ-ПД	15.03.05	10	15.03.02	75,90	20,09

Облигации федерального займа с постоянным купонным доходом (ОФЗ-ПД) являются купонными облигациями с постоянной купонной ставкой, купон выплачивается один раз в год. В отличие от ОФЗ-ПД, купонная ставка по облигациям с фиксированным купонным доходом (ОФЗ-ФК) меняется на протяжении срока обращения облигации, купонные платежи осуществляются ежеквартально. Например, для ОФЗ-ФК 27015 (выделена в таблице жирным шрифтом), выпущенной 8 августа 2001 г. и погашаемой 4 февраля 2004 г., купонная ставка для первого купона составляет 16% годовых, со второго по пятый - 14% годовых, для остальных - 12% годовых. Размер купонного платежа рассчитывается по формуле $i \times N \times T_c / T_y$ и округляется до одной копейки, т.е. по данной облигации 8 ноября 2001 г. будет выплачено 16%×1000×92/365=40,33 руб. (здесь: 16% - ставка купона, 1000 руб. - номинал облигации, 92 дня - длительность купонного периода, 365 - количество дней в году). Фактическая цена (уплачиваемая покупателем продавцу) отличается от котировки на величину накопленного процента, рассчитываемого по формуле $C \times (T_c - T)/T_c$, в нашем случае: 40,33×(92-62)/92 = 13,15 руб. Таким образом, цена облигации 27015 равна 930,60+13,15=943,75 руб. за одну облигацию (или 94,375% номинальной стоимости).
Доходность к погашению купонных облигаций федерального займа рассчитывается как *годовая эффективная ставка* с годовым периодом сложного процента. Доходность к погашению ОФЗ-ПД и ОФЗ-ПК - это такое значение y, которое удовлетворяет уравнению (3.18)

Для ОФЗ-ФК 27015 имеем:

$$943{,}75 = \frac{40{,}33}{(1+y_e)^{62/365}} + \frac{34{,}52}{(1+y_e)^{152/365}} + \sum_{j=1}^{3} \frac{34{,}90}{(1+y_e)^{(152+91\times j)/365}} + \sum_{j=4}^{8} \frac{29{,}92}{(1+y_e)^{(152+91\times j)/365}} + \frac{1000}{(1+y_e)^{880/365}}$$

Решением данного уравнения будет $y_e = 17{,}87\%$ годовых.

Доходность облигаций с возможностью досрочного выкупа

В случае облигаций с возможностью досрочного выкупа (*callable bonds*) эмитент страхует себя от неблагоприятного изменения процентных ставок - если процентные ставки снизятся по сравнению с уровнем, существовавшим на момент выпуска, обслуживать долг с фиксированной ставкой становится невыгодно. При выпуске облигаций с правом досрочного выкупа, эмитент резервирует за собой возможность в определенные условиями эмиссии моменты времени выкупить облигации по заранее оговоренной цене (чаще всего - по номинальной стоимости). Это дает ему возможность, к примеру, рефинансировать долг по более низкой ставке.

Для облигаций с возможностью досрочного выкупа расчет доходности к погашению в обычном понимании невозможен, так как досрочный выкуп фактически аналогичен погашению, но вследствие невозможности точного прогнозирования будущих процентных ставок и соответствующих действий эмитента, невозможно точно знать - состоится ли досрочный выкуп, и если состоится, - то когда.

Широко используемым на многих рынках индикатором доходности облигаций с возможностью досрочного выкупа является показатель *доходности к моменту выкупа* (*yield to call*). Доходность к моменту выкупа расчитывается аналогично доходности к погашению исходя из предположения, что облигация будет выкуплена эмитентом в *первую же возможную дату выкупа*. В случае равных по размеру периодичных купонных платежей размером c, доходность к моменту выкупа будет решением уравнения

$$P = c\sum_{t=1}^{n_c}(1 + y_c)^{-(t+v-1)} + P_c(1 + y_c)^{-v_c},$$

где y_c - доходность к выкупу (процентов за один купонный период), n_c - количество купонных платежей до первой возможной даты выкупа, v_c - время (количество купонных периодов, в общем случае - дробное число) до первой даты выкупа, v - время до первого купонного платежа, c - размер купонного платежа, P_c - цена выкупа.

Возможность досрочного выкупа – это опцион на покупку, владельцем которого является эмитент облигации. Стоимость такой облигации для инвестора может быть представлена как разница между стоимостью аналогичной облигации без права досрочного выкупа и стоимостью опциона на покупку. Тем самым, для оценки облигации с правом досрочного выкупа требуется оценить соответствующий опцион. Вопрос оценки подобных опционов будет рассмотрен в последующих главах.

Доходность облигаций с плавающей ставкой

В случае облигаций с плавающей ставкой размеры купонных платежей как правило привязываются к определенной *ориентирной* рыночной процентной ставке. В этом случае расчет доходности к погашению также невозможен в силу невозможности точного прогнозирования процентных ставок. Поэтому для обязательств с плавающей ставкой имеет смысл расчет лишь *текущей доходности* - по известному следующему купонному платежу (при необходимости текущая доходность может приводиться к эффективному измерению), либо - обсуждаемой ниже *доходности к горизонту*, которая рассчитывается исходя из явного прогноза будущей динамики процентных ставок.

Пример 3.7 Облигации с плавающей ставкой и офертой погашения

Облигации с плавающей ставкой и офертой погашения появились в России в 2000 г. и на протяжении 2000 - 2002 стали одной из наиболее популярных форм выпуска корпоративных облигаций. Оферта погашения означает, что эмитент берет на себя обязательство по выкупу облигаций (по заранее объявленной цене) в определенные будущие моменты времени (как правило, после объявления размер очередного купона). Если облигации возможностью досрочного выкупа означают наличие у эмитента опциона колл (право покупки), то облигации с офертой погашения - это облигации со встроенным опционом пут (право продажи по фиксированной цене), которым владеет инвестор. Распространенность облигаций с офертой объясняется множеством причин. Это, прежде всего, создание дополнительных стимулов для инвесторов (снижается процентный риск, решается проблема с отсутствием адекватной «ориентирной» ставки, на основании которой определяются купонные выплаты - если инвестора не удовлетворяет величина ставки, он выполняет опцион - продает облигацию эмитенту) и снижение издержек эмитента (один относительно долгосрочный выпуск заменяет серию последовательных краткосрочных выпусков). Вопроосы оценки облигаций со встроенным опционом обсуждаются в Главе 10, здесь же речь идет лишь о расчете возможных показателей доходности - на примере выпуска облигаций ЗАО «АВК» (один из крупнейших в Украине производителей кондитерских изделий), размещенного в июле 2002 г. и ставшего первым выпуском облигаций со встроенной офертой погашения в Украине.

Таблица 3.2 Схема обращения первого выпуска облигаций ЗАО «АВК»

Дата	*Действие*
25.07.2002	Начало размещения
23.10.2002	Выплата 1-го купона (20% годовых)
10.01.2003	Объявление ставки по 3-му и 4-му купонам (ставки по 3-му и 4-му купонам равны между собой и не могут быть меньше 90-дневной ставки *KIBOR* - 5%)
21.01.2003	Выплата 2-го купона (20% годовых); Первый досрочный выкуп (по номинальной стоимости)
21.04.2003	Выплата 3-го купона
09.07.2003	Объявление ставки по 5-му и 6-му купонам (равны между собой, не меньше *KIBOR* - 5%)
20.07.2003	Выплата 4-го купона; 2-й досрочный выкуп (по номиналу)
20.10.2003	Выплата 5-го купона
16.01.2004	Выплата 6-го купона и погашение

...

Доходность дисконтных облигаций

Расчет доходности дисконтных облигаций существенно проще по сравнению с купонными. Однако следует принимать во внимание особенности и правила, существующие на различных рынках. Наиболее распространенными показателями доходности в отношении дисконтных облигаций являются *номинальная* (или *простая*) ставка доходности, *эффективная* доходность и *ставка дисконта*.

Пусть, как и прежде, N - номинал облигации, P - текущая рыночная цена, t - время (количество лет) до погашения, рассчитываемое по формуле $t = T / T_y$, где T - количество дней до погашения, T_y - количество дней в году. Номинальная (простая) доходность y_n есть годовая ставка, рассчитанная без учета эффекта реинвестирования, т.е. из соотношений

$$P = \frac{N}{1 + y_n t}, \quad y_n = \left(\frac{N}{P} - 1\right)\frac{1}{t}. \tag{3.21}$$

По отношению к краткосрочным инструментам (большинство дисконтных облигаций является именно краткосрочными) часто считается нецелесообразным учитывать эффект сложных процентов в расчете доходности и данный метод расчета является в целом наиболее распространенным для представления рыночной информации (в частности, для котировок). Тем не менее, такой подход не дает возможности адекватно сравнивать доходность облигаций с различным сроком. Поэтому более точным показателем для целей анализа следует считать эффективную доходность. Эффективная доходность дисконтной облигации y_e рассчитывается как

$$P = \frac{N}{(1 + y_e)^t}, \quad y_e = \left(\frac{N}{P}\right)^{1/t}. \tag{3.22}$$

Величина y_e, полученная из (3.22) является эффективной ставкой с годовым (дискретным) сложным процентом. Напомним, что для сравнения доходности к погашению различных облигаций (например, купонных и дисконтных), расчет должен производиться исходя из одной и той же периодичности начисления процентов.

Ставка дисконта является еще одним популярным методом расчета доходности для дисконтных инструментов. Ставка дисконта y_d есть величина дисконта на единицу номинальной стоимости, приведенная к годовому измерению, т.е.

$$P = N(1 - y_d t), \quad y_d = \left(1 - \frac{P}{N}\right)\frac{1}{t}. \tag{3.23}$$

Ставка дисконта очень часто используется по отношению к векселям. На многих рынках это стандартный рыночный метод расчета доходности для краткосрочных долговых ценных бумаг (например, в США так рассчитывают доходность векселей Казначейства).

Длительность промежутков времени

Способ определения длительности промежутков времени играет существенную роль в расчетах. Так как условия долговых соглашений и параметры выпуска долговых ценных бумаг часто выражают в процентах годовых (проценты по кредитам, купонные ставки по облигациям), а размер выплаты зависит от длительности промежутка времени, способ расчета непосредственно влияет на размер дохода, получаемого инвестором. Способ расчета времени также важен при вычислении размера накопленного купонного дохода. Кроме того, для финансового рынка очень важно, чтобы все участники использовали одинаковые подходы в расчетах цен и ставок доходности, т.к. в противном случае неизбежна путаница и, как следствие - неэффективность функционирования рынка.

Общепринятой рыночной практикой можно считать являются следующие правила:

1) стандартный промежуток времени - один год, соответственно, все ставки выражаются в процентах годовых;
2) время считается непрерывным (с точностью до одного дня);
3) сложный процент, если он учитывается, как правило, дискретный;
4) размер платежа по долговому обязательству обычно рассчитывается как $C = i \times \tau \times N$, где i - объявленная номинальная ставка (например, ставка по кредиту или депозиту, купонная ставка по облигации, и т.п.), N - основная сумма долга (номинальная стоимость долгового обязательства) или *условный номинал* - для производных инструментов, τ - рассчитанная в соответствии с принятыми на рынке правилами и выраженная в годовом измерении *длительность промежутка времени*, за который выплачивается процент;
5) количество лет между моментами (датами) D_1 и D_2, определяется обычно как $\tau = T / T_y$, где T - количество *дней* между D_1 и D_2, T_y - количество *дней в году*.

Различия в правилах расчета промежутков времени проявляются в том, как рассчитывается количество дней между двумя датами и каким считается количество дней в году. Наиболее распространенными методами являются следующие:

1) *Действительное/365*. Один из наиболее простых способов расчета:

$$\tau = \frac{D_2 - D_1}{365}.$$

Данный метод используется на абсолютном большинстве рынков стран бывшего Советского Союза.

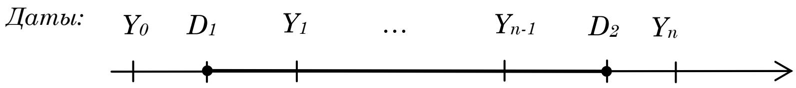
2) *Действительное/360*. Полностью аналогичен предыдущему методу, с единственным исключением - количество дней в году считается равным 360:

$$\tau = \frac{D_2 - D_1}{360}.$$

3) *Действительное/действительное*. Метод учитывает существование високосных лет (включающих 366 дней). Формула для расчета может быть представлена как:

$$\tau = n - 2 + \frac{Y_1 - D_1}{Y_1 - Y_0} + \frac{D_2 - Y_{n-1}}{Y_n - Y_{n-1}},$$

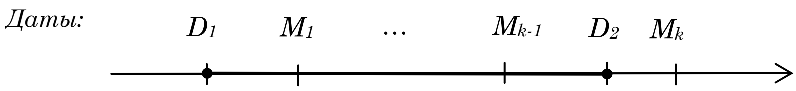
где n - количество календарных лет в рассматриваемом периоде (включая год начала и год конца периода, если даты D_1 и D_2 принадлежат одному году, то $n = 1$), Y_1 - последний день первого года, Y_0 - последний день редыдущего года, Y_{n-1} - последний день предпоследнего года, Y_n - последний день последнего года периода:



4) *30/360*. Количество дней во всех месяцах считается равным 30, количество дней в году, соответственно, - 360. Длительность промежутка времени между датами D_1 и D_2 равна:

$$\tau = \frac{(k-2)}{12} + \frac{M_1 - D_1}{360} + \frac{D_2 - M_{k-1}}{360},$$

где k - количество месяцев, которые охватывает рассматриваемый период времени, M_1 - последний день месяца. в котором находится начало периода (дата D_1), M_{k-1} - последний день месяца, предшествующего месяцу, в котором находится конец периода (дата D_2).



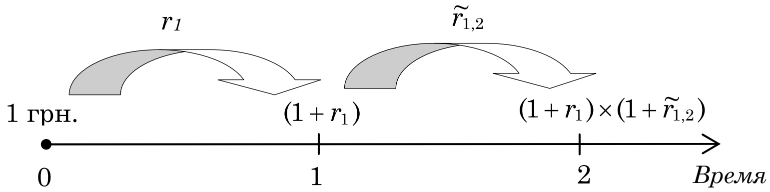
Существуют небольшие различия между европейским (*30E/360*) и американским методом *30/360* в части того - как поступают, если начало или/и конец периода приходится на 31-е число, или если в месяце 28 или 29 дней.

Подчеркнем, что все сказанное относится именно к *принятым рыночным правилам* (т.е. расчетам для целей составления финансовых соглашений, расчета котировок, расчета объема процентных выплат, накопленных процентов, и т.д.)

Реализованная доходность

Доходность к погашению, рассчитанная как эффективная ставка (с учетом доходов от реинвестирования), равна фактической доходности, получаемой инвестором, только при определенных условиях. Во-первых, если процентные ставки со временем меняются - изменяются и условия реинвестирования промежуточных платежей. Во-вторых, горизонт инвестора может не совпадать со сроком погашения инструмента: если горизонт более длинный, чем срок погашения – средства будут реинвестированы по (сегодня неизвестным) будущим процентным ставкам, в противном случае (горизонт меньше срока погашения) – инструмент будет продан по цене, которая также зависит от значений будущих процентных ставок.

Реализованной доходностью (или *доходностью к горизонту*) называют фактическую доходность, получаемую инвестором от вложений в определенный инструмент, рассчитанную исходя из *определенного планового горизонта* и *явного прогноза будущих процентных ставок*. Например, если спот-ставка сроком один период равна r_1, а плановый горизонт инвестора – 2 периода, инвестирование 1 грн. по ставке r_1, принесет через 2 периода совокупный доход $(1+r_1)\times(1+\tilde{r}_{1,2})$ грн., где $\tilde{r}_{1,2}$ - будущая (неизвестная сегодня) ставка спот:



Доходность инвестиций в расчете за один период составит в этом случае:

$$h = \left[(1+r_1)(1+\tilde{r}_{1,2})\right]^{1/2} - 1 .$$

Если $r_1 = 10\%$, а прогнозируемая величина будущей ставки $\tilde{r}_{1,2} = 15\%$, то $h = (1.10\times 1.15)^{1/2} - 1 = 0.1247$ или 12.47% за период.

В общем случае, расчет реализованной доходности для определенного долгового обязательства предполагает следующие шаги:

1) Определить горизонт инвестирования (T);
2) Определить прогноз будущих значений процентных ставок;
3) Рассчитать *совокупный доход на дату горизонта*, который будет получен по данному инструменту (H_T);
4) Рассчитать доходность к горизонту по формуле

$$h_T = (H_T / P)^{1/T} - 1, \qquad (3.24)$$

(P – текущая рыночная цена инструмента). Если требуется рассчитать доходность к горизонту с непрерывным сложным процентом, используется формула

$$\hbar_T = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{H_T}{P}\right). \qquad (3.24')$$

Пример 3.7 Расчет реализованной доходности

Воспользуемся данными из Примера 3.6 и рассчитаем реализованную доходность для облигаций серий 27001 и 27003. Сегодняшний день - 7 сентября 2001 г. Горизонт инвестора - 6 марта 2002 г. ($T = 0{,}4192$ лет). Параметры облигаций приведены в таблице

Даты платежей	*Время (лет)*	*27001*	*27003*
7.11.2001	t_1 = 0.1699	3,70	
5.12.2001	t_2 = 0.2466		3,70
6.02.2002	t_3 = 0.4192	103,70	
6.03.2002	t_4 = 0.4959		3,70
5.06.2002	t_5 = 0.7452		103,70
Валовая цена		101,78	100,87
Доходность к погашению		14,09%	14,42%

Как видно из таблицы, облигация 27003 погашается на 4 месяца позже чем 27001, и имеет небольшое преимущество перед последней по показателю доходности к погашению. Однако вследствие того. что горизонт инвестора не совпадает со сроками погашения облигаций, а промежуточные выплаты необходимо будет реинвестировать (по каким ставкам - неизвестно), фактическая доходность инвестора на дату горизонта может существенно отличаться от величины доходности к погашению.

Для расчета доходности к горизонту используем два варианта прогноза будущих процентных ставок. Первый - стабильность процентных ставок на уроне 15% годовых. Второй - снижение до 10%. Прогнозы такого рода, естественно, являются *упрощением*, т.к. в этом случае считается, что прогнозируемые уровни процентных ставок (15% либо 10%) установятся в ближайшем будущем и останутся неизменными на протяжении всего периода до даты горизонта, кроме того, не принимается по внимание разница в процентных ставках для различных сроков погашения. В отличие от такого подхода, *детализированный* прогноз может описывать динамику процентных ставок по различным срокам погашения на протяжении всего планового периода. Выбор похода к прогнозированию всегда является компромиссом между простотой и более высокой точностью расчетов.

Нами выбран наиболее простой подход к прогнозированию - каждый сценарий характеризуется единственным значением процентной ставки (обозначим ее $\tilde{r}$) - по этой ставке будут реинвестированы доходы и эта же ставка будет использована в качестве ставки дисконтирования при расчете рыночной цены в случае продажи облигаций.

Доход на дату горизонта по облигации 27001 состоит из выплаты при погашении (момент погашения совпадает с датой горизонта), купонного платежа и дохода от реинвестирования этой выплаты

$$103{,}7 + 3{,}7 \times (1+\tilde{r})^{T-t_1}.$$

Доход по облигации 27003 состоит из купонного платежа (5 декабря 2001 г.), дохода от реинвестирования купона и дохода от продажи облигации

$$3{,}7 \times (1+\tilde{r})^{T-t_2} + \frac{3{,}7}{(1+\tilde{r})^{t_4-T}} + \frac{103{,}7}{(1+\tilde{r})^{t_5-T}}.$$

И в одном, и в другом случае не принимались во внимание возможные налоговые платежи - тогда как на практике необходимо учитывать налоговые последствия каждой операции.

Результаты расчетов для двух вариантов сценария приведены в таблице

Сценарии	*27001*	*27003*
Стабильность процентных ставок (15%)		
Доход на дату горизонта	107,53	106,53
Реализованная доходность	14,01%	13,91%
Снижение процентных ставок (10%)		
Доход на дату горизонта	107,49	107,96
Реализованная доходность	13,90%	17,60%

Как видим, в случае стабильности процентных ставок облигации принесут инвестору практически равную доходность (разница всего в 10 базисных пунктов в пользу серии 27001). Но в случае снижения ставок, за счет того, что цена продажи облигации 27003 вырастет, ее реализованная доходность будет существенно выше. Поэтому, если инвестор считает вероятным именно такой сценарий, ему следует предпочесть облигации серии 27003. В то же время, в пользу облигаций серии 27001 говорит то, что доходность по ним почти не реагирует на изменение процентных ставок - они меньше подвержены риску колебаний процентных ставок и, тем самым, более предпочтительны для инвестора, не полагающегося на прогнозы и считающего равно возможным как рост, так и снижение рыночных ставок.

Форвардные ставки

Форвардной ставкой называют такое значение ставки спот в будущем, при которой реализованная доходность краткосрочных и долгосрочных инвестиций одинакова. Пусть r_1 - рыночная спот-ставка сроком 1 период, r_2 - соответственно, 2 периода. Форвардной ставкой $f_{1,2}$ является число, удовлетворяющее условию

$$(1+r_1)(1+f_{1,2}) = (1+r_2)^2,$$

откуда

$$f_{1,2} = \frac{(1+r_2)^2}{1+r_1} - 1.$$

Обозначение $f_{1,2}$ читается как «форвардная ставка между первым и вторым периодами». В общем случае, если $r_1, r_2, \ldots, r_t, \ldots, r_T$ - текущие спот-ставки, форвардная ставка между моментами t и T вычисляется по формуле

$$f_{t,T} = \left[\frac{(1+r_T)^T}{(1+r_t)^t} \right]^{1/(T-t)} - 1 , \tag{3.25}$$

или, что то же самое:

$$f_{t,T} = (p_t / p_T)^{1/(T-t)} - 1 . \tag{3.25'}$$

В дискретном времени, если речь идет о форвардной ставке сроком один период, второй индекс для упрощения записи будем опускать, считая, что $f_{1,2} \equiv f_1$, $f_{2,3} \equiv f_2$ и т.д. Кроме того, по определению можно считать, что $r_1 \equiv f_0$. Используя эти обозначения, приведем еще одно выражение, связывающее форвардные и спот-ставки:

$$R_T \equiv (1+r_T)^T = \prod_{t=0}^{T-1} (1+f_t) , \tag{3.26}$$

Последнее выражение означает, что ставка спот является геометрическим средним форвардных ставок.

Форвардные ставки могут служить ориентиром при выборе между краткосрочными и долгосрочными инвестициями. Если прогнозируемое в будущем значение процентной ставки заведомо меньше форвардной ставки, более эффективными для инвестора с точки зрения доходности являются относительно более долгосрочные вложения, и наоборот - если прогнозируемая спот-ставка выше форвардной - более доходными являются краткосрочные вложения. Использование форвардных ставок при анализе вариантов инвестиций иллюстрируется Примером 3.8.

Пример 3.8 Расчет форвардных ставок

Вернемся к примеру 3.1, в котором на основании рыночной информации были рассчитаны спот-ставки сроком один, два и три периода: $r_1 = 11{,}11\%$, $r_2 = 20{,}31\%$, $r_3 = 27{,}01\%$. На основании этой информации рассчитаем форвардные ставки

$$f_{0,1} \equiv r_1 = 11{,}11\% ,$$

$$f_{1,2} = (1+0{,}2031)^2 / (1+0{,}1111) - 1 = 30{,}27\% ,$$

$$f_{2,3} = (1+0{,}2701)^3 / (1+0{,}2031)^2 - 1 = 41{,}55\% ,$$

$$f_{1,3} = ((1+0.2701)^3 / (1+0{,}1111))^{1/2} - 1 = 35{,}79\% .$$

Интерпретировать эту информацию можно следующим образом: если необходимо сделать выбор между инвестированием в на срок один или два периода, и если инвестор уверен, что будущая (через один период) спот-ставка сроком один период не превысит форвардной ставки (в нашем случае - 30,27%), то более доходными являются вложения на срок два периода. Аналогичные рассуждения справедливы, если необходимо выбрать между инвестициями сроком два и три периода - последние принесут инвестору больший доход в случае если будущая ставка не превысит значения форвардной (41,55%).

Форвардные ставки с непрерывным сложным процентом

Обозначим как $\varphi_{t,T}$ форвардную ставку с непрерывным сложным процентом. По определению $\varphi_{t,T} \equiv \ln(1+f_{t,T})$. Подставляя (3.25'), получим:

$$\varphi_{t,T} = -\frac{\ln p_T - \ln p_t}{T-t}. \tag{3.27}$$

Мгновенную форвардную ставку (при $T \to t$) будем обозначать φ_t. В непрерывном времени форвардную ставку φ_t, как и спот-ставки x_t и цены p_t можно трактовать как непрерывные функции времени погашения *t*, т.е.:

$$x_t = x(t),\ p_t = p(t),\ \varphi_t = \varphi(t).$$

Правая часть выражения (3.27) с обратным знаком при $T \to t$ является производной функции $\ln p(t)$ по времени погашения:

$$\varphi(t) = -\frac{d\ln p(t)}{dt} = -\frac{1}{p(t)}\frac{dp(t)}{dt}. \tag{3.28}$$

Таким образом, форвардную ставку можно интерпретировать как эластичность изменения цены простой дисконтной облигации (коэффициента дисконтирования) по времени. Проинтегрировав последнее выражение на участке от 0 до *t*, получим:

$$\int_0^t \varphi(s)ds = -\ln p(t), \text{ откуда } p(t) = \exp\left(-\int_0^t \varphi(s)ds\right), \tag{3.29}$$

что, по существу, является аналогом соотношения (3.26) для случая непрерывного сложного процента:

$$x(t) = (1/t)\int_0^t \varphi(s)ds, \tag{3.30}$$

- т.е. ставка спот, как и в выражении (3.26), - это *среднее значение форвардных ставок*.

Наконец, подставляя в (3.28) вместо цены простой дисконтной облигации ее выражение $p(t) = e^{-x_t \cdot t}$, получим еще одну формулу для мгновенной форвардной ставки:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{p(t)}\frac{de^{-x(t)t}}{dt} = x(t) + t\frac{dx(t)}{dt}, \tag{3.31}$$

т.е. соответствующая моменту t мгновенная форвардная ставка может быть представлена как сумма спот-ставки сроком t и производной спот-ставки по времени погашения, умноженной на время t. Из выражения (3.31) следует, что если спот-ставки растут при увеличении срока погашения (производная $dx(t)/dt$ положительна), форвардные ставки превышают ставки спот ($\varphi(t) > x(t)$), и наоборот - если спот-ставки с более длительным сроком меньше краткосрочных, получим $\varphi(t) < x(t)$.