

## IV. Структура процентных ставок во времени

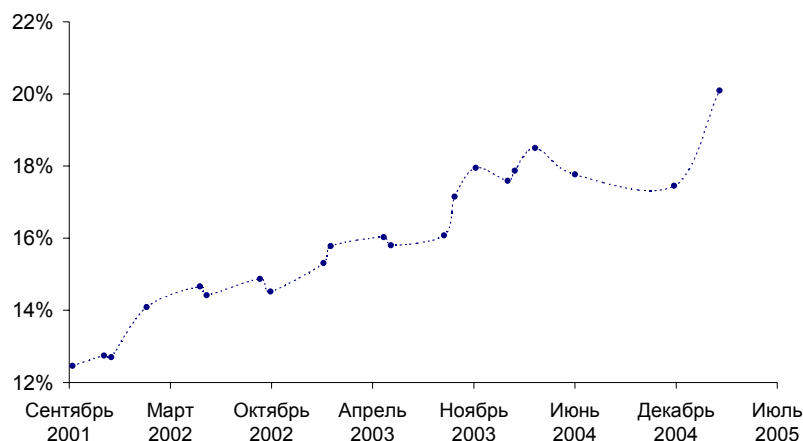
### Кривые доходности

*Кривой доходности* называют взаимосвязь между процентными ставками и сроком погашения долговых обязательств. В зависимости от того, какие именно процентные ставки используются при построении кривой доходности различают *кривую спот-ставок*, *форвардную кривую* и собственно *кривую доходности (yield curve)*. В соответствии с названиями, кривая спот-ставок – это зависимость текущих рыночных ставок спот от времени, форвардная кривая отражает временную структуру краткосрочных форвардных ставок. Кривая доходности – есть зависимость доходности к погашению облигаций одного кредитного класса от срока погашения. Естественно, несмотря на различие отображаемых показателей, все типы кривых связаны между собой и характеризуют *структуру процентных ставок во времени*. Для описания временной структуры стоимости денег во времени часто используют также *кривую цен* простых дисконтных облигаций.

Формы кривых доходности могут быть различными. Если долгосрочные ставки превышают краткосрочные, говорят о *возрастающей* или *нормальной* кривой доходности. Равенство процентных ставок с различным временем погашения означает *плоскую* кривую доходности. Кривую доходности, в которой долгосрочные ставки меньше краткосрочных называют *обратной*. Часто кривые доходности имеют более сложную форму: например когда процентные ставки при увеличении срока вначале возрастают, а затем снижаются.

На Рис. 4.1 изображена *кривая доходности к погашению* рынка государственных обязательств Российской Федерации на 7.09.2001 г. (по данным из примера 3.2). Кривая доходности к погашению имеет ограниченную

практическую ценность - она просто отражает временную структуру доходности для конкретного набора инструментов (каждый инструмент - со своей специфической структурой выплат).



**Рис. 4.1** Кривая доходности к погашению обязательств правительства Российской Федерации на 7 сентября 2001 г. (данные - см. Пример 3.2). Годовые эффективные ставки с годовым сложным процентом.

Различные инструменты, даже принадлежа к одному кредитному классу (например – безрисковые государственные обязательства), могут различаться по степени ликвидности. Часто наиболее активна торговля по только что размещенным облигациям (*on-the-run*), в то время как инструменты, выпущенные относительно давно, могут быть менее ликвидны. Это приводит к тому, что доходность более ранних выпусков (*off-the-run*) превышает доходность недавно размещенных бумаг на определенную величину – премию ликвидности<sup>1</sup>. В результате, при использовании информации обо всех торгуемых инструментах, на протяжении кривой доходности будут присутствовать колебания в ту или другую сторону, вызванные не различиями стоимости денег во времени, а разным качеством инструментов в глазах инвесторов. Поэтому одним из основных правил при построении кривых доходности на основании рыночной информации является исполь-

<sup>1</sup> Игра на разнице доходности облигаций *on-the-run* и *off-the-run* лежала в основе стратегии печально известного хедж-фонда Long Term Capital Management (LTCM). Сама по себе, данная стратегия продемонстрировала свою эффективность – основными причинами краха фонда стали, скорее, недооценка риска, чрезвычайно высокая степень ливериджа (соотношение собственных и заемных средств) и кризис на мировых финансовых рынках в 1997 – 98 гг.

зование данных о *наиболее ликвидных* финансовых инструментах и сегментах рынка<sup>2</sup>.

Кривые спот-ставок являются ключевым инструментом оценки долговых обязательств. Сами по себе рыночные данные о ценах долговых инструментов не содержат полной информации о временной структуре - тем самым необходима определенная процедура *оценивания кривой доходности*.

### Расчет спот ставок по ценам рыночных инструментов

Сложностью при построении кривой доходности является то, что большая часть реальных инструментов характеризуется не единственным (как в случае простой дисконтной облигации), а несколькими денежными потоками. Пусть есть информация о  $K$  инструментах с фиксированным доходом,  $P_k$  - цена  $k$ -го инструмента ( $k = 1, 2, \dots, K$ ),  $C_{ki}$  - выплата по  $k$ -му инструменту в момент времени  $t_i$ . Рассматриваются все моменты времени, в которые возникают выплаты хотя бы по одному инструменту, всего  $n + 1$  моментов времени:  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T$ . Задачей является определение оценок значений коэффициентов дисконтирования  $\hat{p}(t_i)$  для каждого момента времени, чтобы цены, рассчитанные с использованием этих коэффициентов

$$\hat{P}_k = \sum_{i=1}^n \hat{p}(t_i) C_{ik}, \quad (4.1)$$

как можно более точно соответствовали фактическим рыночным ценам  $P_k$ . Если количество рассматриваемых моментов времени равно количеству инструментов ( $n = K$ , т.е. отдельные выплаты по различным инструментам происходят в одни и те же моменты времени - как в примере 3.1 предыдущей главы), коэффициенты дисконтирования, соответствующие фактическим рыночным ценам могут быть определены точно. Обозначим:  $\hat{\mathbf{p}} = \{\hat{p}(t_i)\}_{i=1, \dots, n}$  - вектор искомых коэффициентов дисконтирования,  $\mathbf{P} = \{P_k\}_{k=1, \dots, K}$  - вектор фактических рыночных цен,  $\mathbf{C} = \{C_{ik}\}_{i=1, \dots, n}^{k=1, \dots, K}$  - матрицу выплат. Тогда вектор  $\hat{\mathbf{p}}$  является решением системы линейных уравнений

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{p}}, \quad (4.2)$$

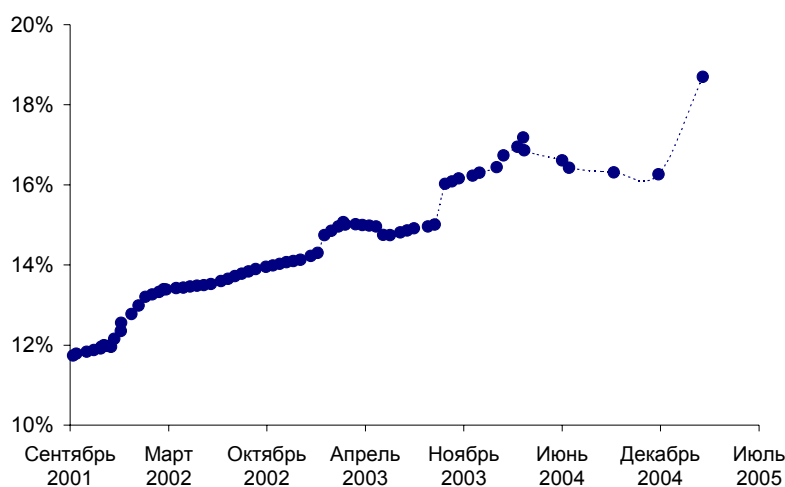
т.е. при  $n = K$  матрица  $\mathbf{C}$  является квадратной, и если существует обратная матрица  $\mathbf{C}^{-1}$ , что подразумевает линейную независимость потоков платежей по отдельным инструментам, получим:

<sup>2</sup> По этой причине рассматриваемые ниже примеры построения кривых доходности носят скорее иллюстративный характер - скажем, вторичный рынок ГКО-ОФЗ, данные которого использованы в нескольких примерах, нельзя считать достаточно ликвидным (по крайней мере на тот момент, который рассматривается - вторая половина 2001 г.).

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{P}.$$

Естественно, что случай  $n = K$  является скорее теоретическим. Если  $n < K$  решение системы (4.2) может не существовать и возможна лишь приближительная оценка вектора  $\hat{\mathbf{p}}$ . Возможное решение - выбрать  $\hat{\mathbf{p}}$  методом наименьших квадратов: таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений оценочных («теоретических») значений цен инструментов от фактических рыночных цен была бы минимальной, т.е. необходимо найти решение задачи

$$\min_{\hat{\mathbf{p}}} \sum_{k=1}^K (P_k - \hat{P}_k)^2 \quad (4.3)$$



**Рис. 4.2.** Кривая спот-ставок (с непрерывным сложным процентом), рассчитанных как решение задачи (4.4), (4.2) по ценам обязательств правительства Российской Федерации на 7 сентября 2001 г. (данные Примера 3.7).

Если  $n < K$ , т.е. количество моментов времени, в которые возникают выплаты, превышает количество рассматриваемых инструментов, система (4.2) может иметь множество решений. Из этого множества естественно выбрать такие значения  $\hat{p}(t_i)$ , которые обеспечивают наибольшую степень гладкости кривой спот-ставок, т.е., например, выбирать  $\hat{p}(t_i)$  из условия

$$\min_{\hat{\mathbf{p}}} \sum_{i=1}^{n-1} (\hat{x}(t_{i+1}) - \hat{x}(t_i))^2, \quad (4.4)$$

где  $\hat{x}(t_i) = -(1/t_i) \ln \hat{p}(t_i)$ . Значения спот ставок, определенные как решение задачи (4.4), (4.2) по данным рынка государственных обязательств Российской Федерации (пример 3.7 предыдущей главы), приведены на рис. 4.2. Коэффициенты дисконтирования  $\hat{p}(t_i)$  в данном случае *точно* соответствуют фактическим ценам, т.е. для всех  $k$  выполняется  $P_k = \hat{P}_k$ .

Рассмотренный способ расчета коэффициентов дисконтирования обладает рядом недостатков. Во-первых, в качестве результата получены только отдельные значения, соответствующие датам выплат по присутствующим на рынке инструментам. Вопрос о значениях ставок *между* этими датами - т.е. о *кривой* коэффициентов дисконтирования (и кривой спот-ставок) *в целом*, остается открытым. Во-вторых, полученные оценки являются *неустойчивыми*: изменения в наборе рыночных инструментов, использующихся в расчете, существенно меняют их значения. В-третьих, отклонения рыночных цен, вызванные наличием спредов и различной ликвидностью инструментов, приводит к негладкой форме кривой: вдоль кривой возможны резкие отклонения ставок в одну или другую сторону, что в целом противоречит рациональным представлениям о временной структуре процентных ставок. Избежать этих недостатков если не полностью, то в значительной степени, позволяют процедуры *сглаживания кривой доходности*.

### Сглаживание кривой доходности

Процедура сглаживания в общем случае сводится к следующему. В первую очередь, необходимо определить аналитический вид функции коэффициентов дисконтирования  $p(t) = \delta(t, \mathcal{L})$  (или функции спот-ставок  $x(t) = \chi(t, \mathcal{L})$ ), с помощью которой будет моделироваться временная структура. Аналитический вид определяется исходя из требуемых свойств кривой доходности и/или определенных теоретических соображений. Вектор  $\mathcal{L} = \{\lambda_j\}_{j=1, \dots, m}$  - это *параметры*, от которых зависит функция и которые необходимо оценить. Оценки параметров (вектор  $\hat{\mathcal{L}}$ ) должны быть такими, чтобы «теоретические» цены инструментов максимально точно соответствовали наблюдаемым. Простейший способ в данном случае - метод наименьших квадратов, т.е. решение задачи

$$\min_{\hat{\mathcal{L}}} \sum_{k=1}^K (P_k - \hat{P}_k)^2, \quad (4.5)$$

где

$$\hat{P}_k = \sum_{i=1}^n \delta(t_i, \hat{\mathcal{L}}) C_{ik} \quad \text{или} \quad \hat{P}_k = \sum_{i=1}^n e^{-\chi(t_i, \hat{\mathcal{L}}) t_i} C_{ik}. \quad (4.6)$$

Вид функций и параметры  $\hat{\lambda}$  должны быть такими, чтобы  $\hat{p}(0) = 1$  (коэффициент дисконтирования для *сегодняшнего* денежного потока равен единице, т.е. одна сегодняшняя гривна должна стоить одну гривну). На вектор параметров  $\hat{\lambda}$  могут накладываться и другие ограничения, связанные, например, с требованием непрерывности и дифференцируемости функции  $\delta(t, \hat{\lambda})$  (или  $\chi(t, \hat{\lambda})$ ). Пусть *все* ограничения на параметры могут быть представлены в линейном виде с помощью соответствующим образом определенных матрицы  $U = \{u_{ij}\}_{i=1, \dots, L}^{j=1, \dots, m}$  и вектора  $q = \{q_i\}_{i=1, \dots, L}$  ( $L$  - общее количество ограничений, накладываемых на параметры)

$$U\hat{\lambda} = q.$$

Кроме того, пусть возможно определить матрицу  $V = \{v_{kj}\}_{k=1, \dots, K}^{j=1, \dots, m}$  размерности  $K \times m$  таким образом, что  $V\hat{\lambda} \equiv \hat{P}$ . В результате получим, что вектор  $\hat{\lambda}$  определяется из обычной модели множественной линейной регрессии с ограничениями, т.е. как решение задачи

$$\min_{\hat{\lambda}} (P - V\hat{\lambda})'(P - V\hat{\lambda}), \text{ при условии } U\hat{\lambda} = q. \quad (4.7)$$

Явное решение задачи (4.7), полученное методом множителей Лагранжа, - известная формула, приводимая большинством учебников по Эконометрике

$$\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_u - (V'V)^{-1}U'[U(V'V)^{-1}U']^{-1}(U\hat{\lambda}_u - q), \quad (4.8)$$

где  $\hat{\lambda}_u$  - оценки метода наименьших квадратов без ограничений

$$\hat{\lambda}_u = (V'V)^{-1}V'P. \quad (4.9)$$

### Сглаживание с помощью обобщенного метода наименьших квадратов

Применение обычного метода наименьших квадратов для оценивания параметров функций  $\delta(t, \hat{\lambda})$  и  $\chi(t, \hat{\lambda})$ , как правило, неэффективно вследствие предположения об одинаковой величине дисперсии остатков  $(P_k - \hat{P}_k)$ , в то время как колебания цен для инструментов с более длинными сроками погашения будут большими по сравнению с краткосрочными. Другими словами - краткосрочные ставки (коэффициенты дисконтирования) оказывают влияние на стоимость как краткосрочных, так и долгосрочных инструментов, поэтому оценка краткосрочных ставок нуждается в большей степени точности. Тем самым требуется применение *обобщенного метода наименьших квадратов*, допускающего различные значения дисперсии остатков (гетероскедастичность), т.е.

$$\text{Var}[P_k - \hat{P}_k] = \sigma^2 \omega_k^2.$$

Естественным выбором в отношении весов  $\omega_k$  является увязывание их с чувствительностью цены  $k$ -го инструмента к изменению процентных ставок. Например (ср. Фонг и Васичек (1982) [ ]), веса могут определяться как  $\omega_k = dP_k / dy_k$ , где  $P_k$  и  $y_k$  - соответственно цена и доходность к погашению  $k$ -го инструмента.

Обозначим через  $\mathbf{W}$  диагональную матрицу, диагональ которой содержит квадраты весовых коэффициентов

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_1^2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & w_K^2 \end{bmatrix}.$$

Тогда оценки обобщенного метода наименьших квадратов с ограничениями на параметры могут быть записаны как

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_u - (\mathbf{V}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{U}'[\mathbf{U}(\mathbf{V}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{U}']^{-1}(\mathbf{U}\hat{\boldsymbol{\lambda}}_u - \mathbf{q}), \quad (4.10)$$

где

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_u = (\mathbf{V}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{P}. \quad (4.11)$$

### Кубические сплайны

Использование *кубических сплайнов* - один из наиболее распространенных методов сглаживания кривой доходности, т.к. он обеспечивает достаточную точность и одновременно непрерывность производных первого и второго порядка. Использование полиномов более высокого порядка дает лучшую точность, но получаемые кривые доходности могут иметь чрезмерно сложную форму и быть слишком чувствительными к изменениям исходных данных.

В случае использования сплайнов, оцениваемая функция определяется кусочно. Во-первых, необходимо определить количество и продолжительность интервалов времени, для каждого из которых будут оцениваться свои значения параметров. Однозначных правил здесь не существует. Количество так называемых *узловых точек* (точек на оси времени, где одна функция сменяется другой) должно быть достаточным, чтобы обеспечить необходимый уровень точности оценки (в качестве критериев могут выступать, например, максимальное абсолютное отклонение «теоретической» цены от

фактической или сумма квадратов отклонений), но, в то же время не должно быть *слишком* большим, обеспечивая гладкость кривой доходности.

Пусть выбрано  $S+1$  узловых точек, соответствующих моментам времени  $\tau_0 = 0, \tau_1, \dots, \tau_S$ . Кривая коэффициентов дисконтирования  $\delta(t, \boldsymbol{\lambda})$  определяется как

$$\delta(t, \boldsymbol{\lambda}) = \delta_s(t, \boldsymbol{\lambda}), \quad t \in [\tau_{s-1}, \tau_s), \quad s = 1, 2, \dots, S \quad (4.12)$$

Функции<sup>3</sup>  $\delta_s(t)$  (и  $\delta(t)$  в целом) должны быть непрерывными и, как минимум, дважды дифференцируемы, для чего, в частности, в узловых точках должны выполняться условия

$$\delta_s(\tau_s) = \delta_{s+1}(\tau_s), \quad s = 1, 2, \dots, S-1, \quad (4.13)$$

$$\frac{d\delta_s(\tau_s)}{dt} = \frac{d\delta_{s+1}(\tau_s)}{dt}, \quad s = 1, 2, \dots, S-1, \quad (4.14)$$

$$\frac{d^2\delta_s(\tau_s)}{dt^2} = \frac{d^2\delta_{s+1}(\tau_s)}{dt^2}, \quad s = 1, 2, \dots, S-1. \quad (4.15)$$

Кроме того, коэффициент дисконтирования для сегодняшнего дня ( $\tau = 0$ ) должен равняться единице

$$\delta_1(\tau_0) \equiv \delta_1(0) = 1. \quad (4.16)$$

Если в качестве функций  $\delta_s(t)$  используются полиномы третьей степени

$$\delta_s(t) = a_s + b_s t + c_s t^2 + d_s t^3, \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad (4.17)$$

ограничения (4.13) - (4.15) запишутся

$$a_s + b_s \tau_s + c_s \tau_s^2 + d_s \tau_s^3 = a_{s+1} + b_{s+1} \tau_s + c_{s+1} \tau_s^2 + d_{s+1} \tau_s^3, \quad s = 1, 2, \dots, S-1, \quad (4.13')$$

$$b_s + 2c_s \tau_s + 3d_s \tau_s^2 = b_{s+1} + 2c_{s+1} \tau_s + 3d_{s+1} \tau_s^2, \quad s = 1, 2, \dots, S-1, \quad (4.14')$$

$$2c_s + 6d_s \tau_s = 2c_{s+1} + 6d_{s+1} \tau_s, \quad s = 1, 2, \dots, S-1, \quad (4.15')$$

Условие (4.16) в данном случае означает  $a_1 = 1$ . Кроме того, если известна краткосрочная ставка  $x_0$ , естественно потребовать, чтобы оценка краткосрочной ставки равнялась ее фактическому значению. Принимая во внимание, что  $x_0 = \varphi(0)$ , где  $\varphi(t)$  - мгновенная форвардная ставка, а также тот факт, что  $\varphi(t) = -(1/p(t))(dp(t)/dt)$  (см. выражение (3.20) в предыдущей главе), для функции  $\delta_1(t)$  при  $t = 0$  и  $p(0) = 1$  получим

<sup>3</sup> Зависимость оцениваемых функций от вектора параметров  $\boldsymbol{\lambda}$  в дальнейшем, для сокращения записи, будем опускать.



$$x_0 = \varphi(0) = -\frac{1}{p(0)}(b_1 + 2c_1t + 3d_1t^2) = -b_1.$$

Тем самым, если известна краткосрочная ставка - известно и значение параметра  $b_1 = -x_0$ . В целом, вектор оцениваемых параметров может быть представлен как

$$\lambda = (c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \dots, a_S, b_S, c_S, d_S)',$$

т.е. всего оценивается  $4S - 2$  параметров, при этом общее количество ограничений, накладываемых на параметры (условия (4.13') - (4.15')) равно  $3(S-1)$ .

Сократить количество параметров, и одновременно - избавиться от накладываемых на параметры ограничений, можно используя обобщенную формулу для кубического сплайна (см. напр. Джеймс и Уэббер (2001) [ ]):

$$\delta(t) = \sum_{i=0}^3 \tilde{a}_i t^i + \sum_{s=1}^{S-1} \tilde{b}_s (t - \tau_s)_+^3, \quad (4.18)$$

где  $(t - \tau_s)_+ = \max(0, t - \tau_s)$ . Если представить  $\delta(t)$  в виде (4.12), то функции  $\delta_s(t)$  запишутся:

$$\begin{aligned} \delta_1(t) &= \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 t + \tilde{a}_2 t^2 + \tilde{a}_3 t^3, \quad t \in [0, \tau_1), \\ \delta_{s+1}(t) &= \sum_{i=0}^3 \tilde{a}_i t^i + \sum_{j=s}^{S-1} \tilde{b}_j (t - \tau_j)^3, \quad t \in [\tau_s, \tau_{s+1}), \quad s = 1, \dots, S-1. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Несложно заметить, что ограничения (4.13) - (4.15) (равенство значений  $\delta_s(t)$ , а также их первых и вторых производных в узловых точках) для данных функций выполняются независимо от значений параметров: фактически, (4.19) получено простой подстановкой ограничений (4.13') - (4.15') в выражение (4.17). Если, как и ранее, считать  $\delta(0) = \tilde{a}_0 = 1$  и  $\tilde{a}_1 = -x_0$ , количество оцениваемых параметров сокращается до  $S+1$ , вектор параметров можно представить как:

$$\lambda = (\tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{S-1})',$$

причем дополнительные ограничения на  $\lambda$  не накладываются. Оценки вектора  $\lambda$  определяются как решение задачи безусловной оптимизации:

$$\min_{\hat{\lambda}} (\tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{V}\hat{\lambda})'(\tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{V}\hat{\lambda}), \quad (4.20)$$

где:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \{\tilde{P}_k\}_{k=1, \dots, K}, \quad \tilde{P}_k = P_k - \tilde{a}_0 \sum_{i=1}^n C_{ik} - \tilde{a}_1 \sum_{i=1}^n t_i C_{ik} = P_k - \sum_{i=1}^n C_{ik} + x(0) \sum_{i=1}^n t_i C_{ik},$$

( $P_k$  как и прежде - фактические цены инструментов,  $C_{ik}$  - платежи по  $k$ -му инструменту в моменты  $t_i$ ). Матрицу  $V$ , используя (4.6) и (4.18) можно представить как:

$$V = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n C_{i1} t_i^2 & \sum_{i=1}^n C_{i1} t_i^3 & \sum_{i=1}^n C_{i1} (t_i - \tau_1)_+^3 & \dots & \sum_{i=1}^n C_{i1} (t_i - \tau_{S-1})_+^3 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \sum_{i=1}^n C_{iK} t_i^2 & \sum_{i=1}^n C_{iK} t_i^3 & \sum_{i=1}^n C_{iK} (t_i - \tau_1)_+^3 & \dots & \sum_{i=1}^n C_{iK} (t_i - \tau_{S-1})_+^3 \end{bmatrix}.$$

Решением (4.20) является вектор:

$$\hat{\lambda} = (V'V)^{-1} V' \tilde{P}. \quad (4.21)$$

Если используются весовые коэффициенты  $w_k$ , оценки метода наименьших квадратов будут равны соответственно:

$$\hat{\lambda} = (V'W^{-1}V)^{-1} V'W^{-1} \tilde{P}. \quad (4.22)$$

#### Пример 4.1 Сглаживание кривой доходности с помощью кубических сплайнов

Рассмотрим сглаживание кривой доходности на примере данных по рынку государственных облигаций РФ за 7.09.2001. Прежде всего необходимо определить матрицу платежей  $C$ , фрагмент которой приведен в таблице 4.1:

**Таблица 4.1** Матрица платежей по ОФЗ-ПД и ОФЗ-ФК на 7.09.2001 (фрагмент)

Время $t$ (лет), всего 80 моментов времени (строк)	Инструменты, всего 18 облигаций (столбцов)							
	21150	21152	25023	26002	26003	27015	27014	27001
0.014			114					
0.033							3.068	
0.090								
0.129								
0.167								3.7
0.170						4.033		
0.186	100							
0.205								
0.225		100						
0.244								
0.279								
0.282							3.989	

0.340		
0.378		
0.416	3.452	103.7

Выберем 6 узловых точек ( $S = 5$ )  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_1 = 0,25$ ,  $\tau_2 = 0,5$ ,  $\tau_3 = 1$ ,  $\tau_4 = 2$ ,  $\tau_5 = 3,521$  (время в годах, 3,521 лет - это срок погашения наиболее длинной облигации в рассматриваемой выборке). Данные по цене, доходности, продолжительности, а также некоторые другие необходимые расчетные показатели, приведены в таблице 4.2.

**Таблица 4.2** Сглаживание кубическими сплайнами (промежуточные расчеты)

Инструмент (код облигации)	Цена, $P_k$	Доходность (годовой сложный процент)	Доходность (непрерывный сложный процент)	Дюрация Маколея (лет)	$\Sigma C_{ik}$	$\Sigma C_{ikt_i}$	$\Sigma C_{ikt_i^2}$	$\Sigma C_{ikt_i^3}$
21150	97.79	12.74%	12.00%	0.1863	100.0	18.6	3.5	0.6
21152	97.35	12.70%	11.95%	0.2247	100.0	22.5	5.0	1.1
25023	113.82	12.46%	11.74%	0.0137	114.0	1.6	0.0	0.0
26002	88.62	18.49%	16.96%	2.2261	130.0	297.6	724.6	1797.8
26003	80.72	20.09%	18.30%	2.9162	140.0	432.8	1452.6	4996.3
27015	94.38	17.87%	16.44%	2.0460	132.9	281.4	647.8	1526.2
27014	94.33	17.45%	16.09%	2.5831	145.0	398.7	1230.6	3910.5
27001	101.78	14.09%	13.18%	0.4076	107.4	43.8	18.1	7.5
27003	100.87	14.42%	13.47%	0.7162	111.1	79.7	58.3	42.9
27004	105.19	14.87%	13.87%	0.9335	119.8	112.9	113.6	115.8
27006	100.18	15.31%	14.25%	1.2484	119.8	151.2	201.9	273.8
27007	99.11	15.78%	14.66%	1.2864	119.8	155.8	213.7	297.8
27008	97.29	16.03%	14.87%	1.5272	122.3	189.6	311.7	521.7
27009	97.03	15.80%	14.67%	1.5658	122.3	194.3	326.4	558.4
27010	100.14	16.08%	14.91%	1.7126	129.8	229.1	446.7	888.8
27013	92.61	17.77%	16.36%	2.2975	135.9	324.7	844.4	2252.4
27011	95.40	17.15%	15.83%	1.7964	127.3	235.2	472.0	966.7
28001	93.06	17.59%	16.21%	2.0169	129.8	270.9	616.4	1433.8

В качестве оценки краткосрочной ставки возьмем доходность инструмента с наиболее близким сроком погашения (облигация 25023, погашаемая 12.09.2001 г.):  $x_0 = 11,74\%$ .

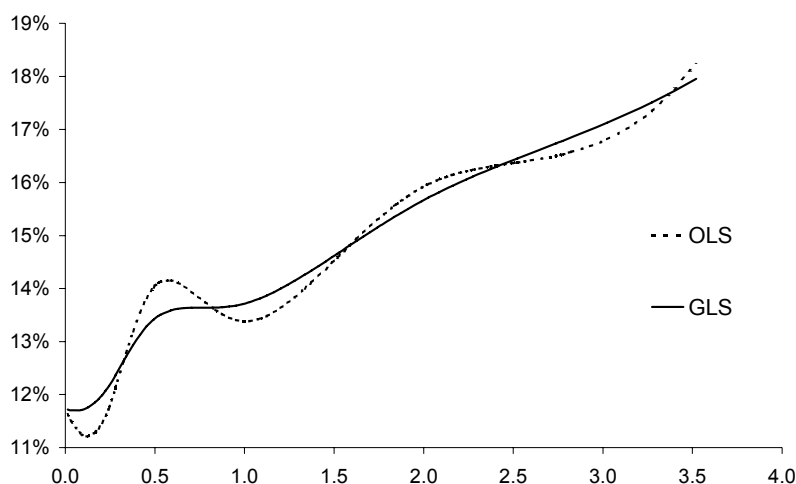
Оценки параметров кубических сплайнов, полученные с помощью обычного метода наименьших квадратов (формула (4.21)), приведены в таблице:

$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$	$\tilde{b}_1$	$\tilde{b}_2$	$\tilde{b}_3$	$\tilde{b}_4$
-0.3528	0.0925	0.7582	-0.5394	0.1714	-0.0616

Оценки обобщенного метода наименьших квадратов (формула (4.22)), в качестве весов использованы показатели дюрации Маколея) составляют:

$\tilde{a}_2$	$\tilde{a}_3$	$\tilde{b}_1$	$\tilde{b}_2$	$\tilde{b}_3$	$\tilde{b}_4$
-0.1319	0.0222	0.2991	-0.2177	0.0640	-0.0180

Кривые доходности, полученные в результате сглаживания, приведены на Рис. 4.3. Очевидно, что применение обычного метода наименьших квадратов дает неудовлетворительные результаты с точки зрения гладкости полученной кривой - изменчивость ставок, в особенности для сроков менее одного года является слишком большой. В то же время, обобщенный метод наименьших квадратов дает существенно более гладкую кривую доходности при незначительном снижении точности оценок фактических рыночных цен (сумма квадратов отклонений равна 13,31 против 12,05 для обычного МНК)



**Рис. 4.3** Кривые доходности по данным рынка ГКО-ОФЗ на 7 сентября 2001 г. (спот-ставки с непрерывным сложным процентом), аппроксимированные с помощью *кубических сплайнов*. Приведены варианты, полученные с помощью обычного (OLS) и обобщенного (GLS) метода наименьших квадратов (в качестве весовых коэффициентов использованы показатели дюрации Маколея). Очевидно, что оценки OLS не обеспечивают достаточной гладкости кривой и неприемлемы по сравнению с оценками GLS.

### ***B*-сплайны**

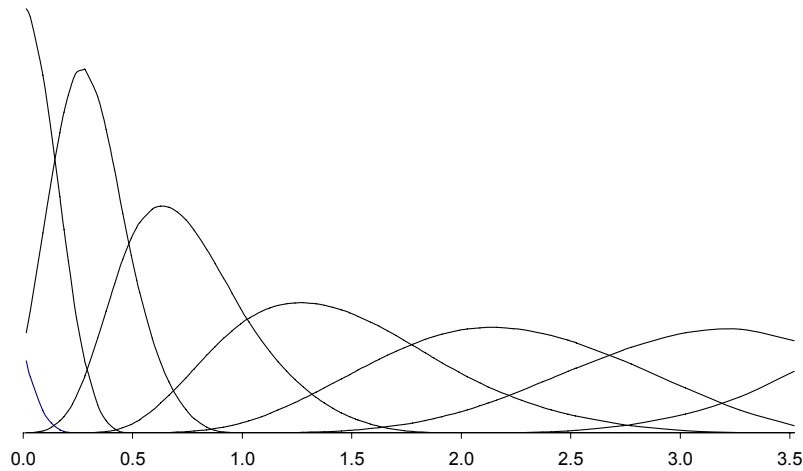
Методом, свободным от недостатков кубических сплайнов (в частности, неограниченности функций  $\delta_s(t)$ ), является сглаживание *B-сплайнами*. Функция  $\delta(t)$  представляется как линейная комбинация *B-сплайнов*  $\delta_s(t)$ :

$$\delta(t) = \sum_{s=-2}^S \lambda_s \delta_s(t), \quad (4.23)$$

где  $\lambda_s$  ( $s = -2, -1, 0, 1, \dots, S$ ) - параметры, которые необходимо оценить (всего  $S+3$  параметров),

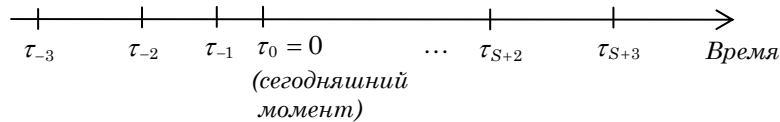
$$\delta_s(t) = \sum_{i=s-1}^{s+3} b_{si} (t - \tau_i)_+^3, \quad s = -2, -1, 0, 1, \dots, S, \quad (4.24)$$

$$b_{si} = \prod_{\substack{j=s-1 \\ j \neq i}}^{s+3} \frac{1}{\tau_j - \tau_i}.$$



**Рис. 4.4** В-сплайны (формула (4.24)) для узловых точек  $-1, -0,5, -0,25, 0, 0,25, 1, 2, 3,521, 4, 5, 6$ .

Для расчета В-сплайнов, помимо выбранных узловых точек  $\tau_0 = 0, \tau_1, \dots, \tau_S$ , необходимо определить 6 «фиктивных» узлов: отрицательные  $\tau_{-3}, \tau_{-2}, \tau_{-1}$  (слева от оцениваемого интервала времени) и  $\tau_{S+1}, \tau_{S+2}, \tau_{S+3}$  - за границей горизонта  $\tau_S$



Как и в случае кубических сплайнов, потребуем, чтобы коэффициент дисконтирования для сегодняшнего момента времени ( $t = 0$ ) равнялся единице

$$\begin{aligned}
\delta(0) &= \lambda_{-2}\delta_{-2}(0) + \lambda_{-1}\delta_{-1}(0) + \lambda_0\delta_0(0) \\
&= \lambda_{-2}(b_{-2,-3}(-\tau_{-3})^3 + b_{-2,-2}(-\tau_{-2})^3 + b_{-2,-1}(-\tau_{-1})^3) + \\
&\quad + \lambda_{-1}(b_{-1,-2}(-\tau_{-2})^3 + b_{-1,-1}(-\tau_{-1})^3) + \\
&\quad + \lambda_0 b_{0,-1}(-\tau_{-1})^3 \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Кроме того, мгновенная ставка в модели должна равняться фактической краткосрочной ставке  $x_0$

$$-\frac{1}{\delta(t)} \frac{d\delta(t)}{dt} \Big|_{t=0} = x_0,$$

т.е.

$$\begin{aligned}
-x_0 &= \lambda_{-2} \frac{d\delta_{-2}}{dt} \Big|_{t=0} + \lambda_{-1} \frac{d\delta_{-1}}{dt} \Big|_{t=0} + \lambda_0 \frac{d\delta_0}{dt} \Big|_{t=0} \\
&= 3 \left[ \lambda_{-2} (b_{-2,-3}(-\tau_{-3})^2 + b_{-2,-2}(-\tau_{-2})^2 + b_{-2,-1}(-\tau_{-1})^2) + \right. \\
&\quad + \lambda_{-1} (b_{-1,-2}(-\tau_{-2})^2 + b_{-1,-1}(-\tau_{-1})^2) + \\
&\quad \left. + \lambda_0 b_{0,-1}(-\tau_{-1})^2 \right]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Оценка параметров  $B$ -сплайна может, как и ранее, осуществляться методом наименьших квадратов. Определим матрицу  $V$  размерности  $K \times (S+3)$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n C_{i1} \delta_{-2}(t_i) & \sum_{i=1}^n C_{i1} \delta_{-1}(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^n C_{i1} \delta_S(t_i) \\ \dots & & \ddots & \dots \\ \sum_{i=1}^n C_{iK} \delta_{-2}(t_i) & \sum_{i=1}^n C_{iK} \delta_{-1}(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^n C_{iK} \delta_S(t_i) \end{bmatrix},$$

или

$$\mathbf{V} = \mathbf{C}\mathbf{B}',$$

где  $\mathbf{B} = \{\delta_s(t_i)\}_{i=1, \dots, n}^{s=-2, \dots, S}$ . Для введения в модель ограничений (4.25), (4.26) определим матрицу  $\mathbf{U}$  размерности  $2 \times (S+3)$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \delta_{-2}(0) & \delta_{-1}(0) & \delta_0(0) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{d\delta_{-2}}{dt} \Big|_{t=0} & \frac{d\delta_{-1}}{dt} \Big|_{t=0} & \frac{d\delta_0}{dt} \Big|_{t=0} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

и вектор  $\mathbf{q} = (1, -x(0))'$ . Оценки

$$\mathcal{K} = (\mathcal{K}_{-2}, \mathcal{K}_{-1}, \dots, \mathcal{K}_5)',$$

рассчитываются в соответствии с формулой (4.8) для обычного метода наименьших квадратов, или (4.10) - в случае использования весов, причем еще раз подчеркнем, что последний подход более оправдан.

#### Пример 4.2 Сглаживание кривых доходности с помощью $B$ -сплайнов

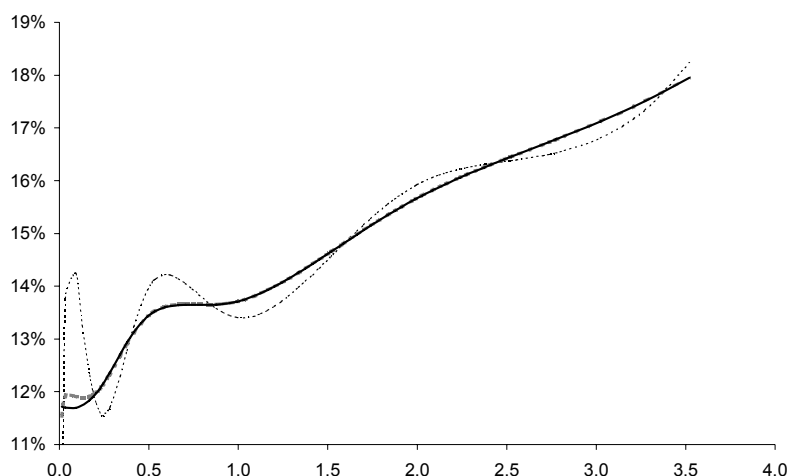
Для иллюстрации использования  $B$ -сплайнов, используем те же данные, что и в примере 4.1 (цены на рынке ГКО-ОФЗ на 7 сентября 2001 г.) В качестве узловых точек выберем

$\tau_{-3} = -1$ ,  $\tau_{-2} = -0,5$ ,  $\tau_{-1} = -0,25$ ,  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_1 = 0,25$ ,  $\tau_2 = 0,5$ ,  $\tau_3 = 1$ ,  $\tau_4 = 2$ ,  $\tau_5 = 3,521$ ,  $\tau_6 = 4$ ,  $\tau_7 = 5$ ,  $\tau_8 = 6$ .  $B$ -сплайны для данного множества узловых точек изображены на Рис. 4.4. Оценки параметров  $\lambda_s$  приведены в таблице 4.3.

**Таблица 4.3** Параметры  $B$ -сплайнов (рынок ГКО-ОФЗ на 7.09.2001)

$s$	Обобщенный МНК с ограничениями (4.25), (4.26)	Обобщенный МНК без ограничений	Обычный МНК
-2	1.2880	1.2927	1.3599
-1	0.9995	0.9986	0.9863
0	1.2146	1.2150	1.2231
1	1.8427	1.8423	1.8254
2	2.7972	2.7978	2.8382
3	2.4486	2.4479	2.3804
4	2.3175	2.3184	2.4220
5	1.7728	1.7711	1.5703

Соответствующие кривые доходности приведены на Рис. 4.5. Рисунок, в частности, иллюстрирует принципиальную важность использования весовых коэффициентов (обобщенного МНК) и включения в модель ограничений - в противном случае форма кривой доходности является неудовлетворительной из-за слишком больших колебаний ставок для коротких сроков погашения. Отметим также, что кривая доходности, построенная с использованием оценок обобщенного МНК с ограничениями, для моделей обычных кубических сплайнов и  $B$ -сплайнов, практически идентична.



**Рис. 4.5** Кривая спот-ставок рынка ГКО-ОФЗ на 7.09.2001 г., построенная с использованием  $B$ -сплайнов (сплошная линия). Штриховыми линиями показаны кривые, соответствующие моделям без ограничений и весовых коэффициентов.

### Экспоненциальные сплайны

Экспоненциальный сплайн, предложенный Фонгом и Васичеком (1982) [ ], может быть представлен как

$$\delta(t) = \delta_s(t), \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i), \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad \delta_s(t) = a_s + b_s e^{-t\xi} + c_s e^{-2t\xi} + d_s e^{-3t\xi}. \quad (4.27)$$

Количество параметров равно  $4S + 1$

$$\lambda = (a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_S, b_S, c_S, d_S, \xi)'$$

Как и прежде, должны выполняться ограничения (4.13) - (4.16). Подстановка данных ограничений в формулу сплайна сокращает количество оцениваемых параметров. Отличием от полиномиальных сплайнов является необходимость использования процедур нелинейной оптимизации при оценке параметров, в то время как точность оценки и форма кривой доходности существенно не улучшаются.

### Альтернативные критерии

Ключевым недостатком метода наименьших квадратов при сглаживании кривой доходности является то, что он, обеспечивая максимально возможную точность оценки выбранного набора инструментов, не гарантирует



достаточной *гладкости* кривой. Поэтому более целесообразным может быть выбор параметров функции  $\delta(t, \lambda)$ , обеспечивающий *максимальную* гладкость, например, используя критерий:

$$\max_{\hat{\lambda}} \int_0^T \left( \frac{d^2 \delta(t, \hat{\lambda})}{dt^2} \right)^2 dt. \quad (4.28)$$

При этом должна обеспечиваться точность оценок, т.е. требуется, чтобы сумма квадратов отклонений не превышала определенного значения:

$$(\mathbf{P} - \hat{\mathbf{P}})'(\mathbf{P} - \hat{\mathbf{P}}) < \varepsilon. \quad (4.29)$$

Обсуждение других критериев гладкости см., например, в работах Адамса и Девентера (1994) [ ], Диркса (1995) [ ], Андерсона и др. (1996) [ ], Джеймс и Веббера (2001) [ ].

### Сглаживание кривых спот-ставок и форвардных кривых

Выше обсуждалось, в основном, сглаживание кривой цен дисконтных облигаций  $\delta(t)$ . Совершенно аналогично могут сглаживаться кривая спот-ставок  $\chi(t)$  и форвардная кривая  $\varphi(t)$ . Отличием, при использовании метода наименьших квадратов, будет нелинейность зависимости цен инструментов от оцениваемых параметров, и соответственно, - необходимость использования методов нелинейной регрессии.

Кривые  $\chi(t)$  или  $\varphi(t)$  (вместо  $\delta(t)$ ) необходимо оценивать в случае, когда требуется, чтобы кривые доходности обладали определенными свойствами. Например (см. Девентер и Имаи (1997) [ ]), кубический сплайн кривой  $\delta(t)$  гарантирует что она будет дважды дифференцируемой, но форвардная кривая:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\delta(t)} \frac{d\delta(t)}{dt},$$

будет иметь разрывную вторую производную:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{1}{\delta} \frac{d^3 \delta}{dt^3} + \frac{3}{\delta^2} \frac{d\delta}{dt} \frac{d^2 \delta}{dt^2} - \frac{2}{\delta^3} \left( \frac{d\delta}{dt} \right)^3,$$

что, в частности, может не отвечать предположениям моделей процентных ставок (см. Главу 7).

### Сглаживание форвардной кривой с использованием полиномиальных сплайнов четвертого порядка

Форвардная кривая с непрерывной второй производной, обеспечивающая одновременно максимальную гладкость, т.е. удовлетворяющая критерию:

$$\min \int_0^T \left( \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} \right)^2 dt,$$

является полиномиальным сплайном четвертого порядка (см. Адамс и Девентер (1994) [ ])

$$\varphi(t) = \varphi_s(t), \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i), \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad \varphi_s(t) = \sum_{j=0}^4 \alpha_{js} t^j, \quad (4.30)$$

причем должны выполняться условия равенства функций  $\varphi_s(t)$  и их производных (до третьего порядка включительно) в узловых точках

$$\varphi_s(\tau_s) = \varphi_{s+1}(\tau_s), \quad s = 1, 2, \dots, S-1, \quad (4.31)$$

$$\frac{d\varphi_s(\tau_s)}{dt} = \frac{d\varphi_{s+1}(\tau_s)}{dt}, \quad s = 1, 2, \dots, S-1, \quad (4.32)$$

$$\frac{d^2\varphi_s(\tau_s)}{dt^2} = \frac{d^2\varphi_{s+1}(\tau_s)}{dt^2}, \quad s = 1, 2, \dots, S-1, \quad (4.33)$$

$$\frac{d^3\varphi_s(\tau_s)}{dt^3} = \frac{d^3\varphi_{s+1}(\tau_s)}{dt^3}, \quad s = 1, 2, \dots, S-1. \quad (4.34)$$

Подставляя ограничения (4.31) - (4.34) в выражение (4.30) получим обобщенную формулу полиномиального сплайна четвертого порядка, сократив тем самым количество оцениваемых параметров с  $5S$  до  $S+4$

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^4 \tilde{\alpha}_j t^j + \sum_{s=1}^{S-1} \tilde{b}_s (t - \tau_s)_+^4. \quad (4.35)$$

Выразим кривую коэффициентов дисконтирования через форвардную кривую

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \exp\left(-\int_0^t \varphi(z) dz\right) = \\ &= \exp\left(-\sum_{j=0}^4 \frac{\tilde{\alpha}_j}{j+1} t^{j+1} - \sum_{s=1}^{S-1} \frac{\tilde{b}_s}{5} (t - \tau_s)_+^5\right). \end{aligned}$$

Условие  $\delta(0) = 1$  в данном случае выполняется автоматически. Кроме того, необходимо потребовать, чтобы текущая краткосрочная ставка равнялась фактическому значению  $x_0$

$$\varphi(0) = \tilde{a}_0 = x_0.$$

Таким образом, необходимо оценить вектор из  $S + 3$  параметров

$$\lambda = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{S-1})',$$

для которого «теоретические» цены инструментов

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_k &= \sum_{i=1}^n \delta(t_i) C_{ki} = \\ &= \sum_{i=1}^n \exp\left(-\sum_{j=0}^4 \frac{\tilde{a}_j}{j+1} (t_i)^{j+1} - \sum_{s=1}^{S-1} \frac{\tilde{b}_s}{5} (t_i - \tau_s)_+^5\right) C_{ki}, \\ k &= 1, \dots, K, \end{aligned}$$

наиболее точно соответствуют фактическим ценам  $P_k$ . Вследствие нелинейного характера взаимосвязей, решение данной задачи предполагает использование моделей нелинейной регрессии и, соответственно, - методов нелинейной оптимизации.

Рассмотрим *частный случай*, когда сглаживание форвардной кривой может быть сведено к *линейной* модели. Пусть рассматриваемый набор рыночных инструментов состоит исключительно из обязательств с *единственной* выплатой. Т.е. по каждому  $k$ -му инструменту ( $k = 1, \dots, K$ ) с текущей рыночной ценой  $P_k$ , есть лишь одна выплата  $C_k$ , которая будет сделана через  $t_k$  лет. Тогда  $p(t_k) = P_k / C_k$  - это *фактические* значения коэффициентов дисконтирования на срок  $t_k$  лет. *Оценки* коэффициентов дисконтирования  $\hat{p}(t_k)$  определяются как

$$\ln \hat{p}(t_k) = -\sum_{j=0}^4 \frac{\tilde{a}_j}{j+1} (t_k)^{j+1} - \sum_{s=1}^{S-1} \frac{\tilde{b}_s}{5} (t_k - \tau_s)_+^5, \quad k = 1, \dots, K.$$

В качестве узловых точек выберем сроки погашения рассматриваемого набора инструментов, т.е.  $S = K$ , и  $t_k = \tau_s$  при  $s = k$ . Параметры в этом случае можно выбрать таким образом, чтобы оценки коэффициентов дисконтирования в узловых точках *равнялись* фактическим значениям

$$\ln p(t_k) = \ln \mathbb{P}(t_k), \quad k = 1, \dots, K. \quad (4.36)$$

Чтобы свести оценку параметров к решению системы линейных уравнений, необходимо определить три дополнительных ограничения. Воспользуемся рекомендациями Девентера и Имаи (1997) [ ], введя ограничения

обеспечивающие нулевой наклон форвардной кривой в крайней правой точке рассматриваемого интервала времени

$$\left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=t_K} = 0.$$

и линейный характер кривой в крайних точках интервала

$$\left. \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right|_{t=t_K} = 0.$$

В нашем случае данные условия означают соответственно

$$\sum_{j=1}^4 \tilde{\alpha}_j j(t_K)^{j-1} + \sum_{s=1}^{S-1} 4\tilde{b}_s (t_K - \tau_s)^3 = 0, \quad (4.37)$$

$$\sum_{j=2}^4 \tilde{\alpha}_j j(j-1)(t_0)^{j-2} = 0, \text{ или, если } t_0 = 0, \tilde{\alpha}_2 = 0, \quad (4.38)$$

$$\sum_{j=2}^4 \tilde{\alpha}_j j(j-1)(t_K)^{j-2} + \sum_{s=1}^{S-1} 12\tilde{b}_s (t_K - \tau_s)^2 = 0. \quad (4.39)$$

Уравнения (4.36) вместе с (4.37) - (4.39) образуют систему из  $K+3$  линейных уравнений с  $K+3$  неизвестными (т.к.  $S=K$ ), однозначно определяющую искомый вектор параметров. В Примере 4.3 данный подход использован для построения форвардной кривой по данным украинского рынка межбанковских кредитов. Данные рынка межбанковских кредитов используются здесь и далее (Примеры в этой главе и в главе 7) *исключительно в иллюстративных целях*, т.к. не являются достаточными для построения полноценной кривой доходности - фактически, речь идет лишь о сверхкраткосрочном (до трех месяцев) участке кривой.

**Пример 4.3** Сглаживание форвардной кривой полиномиальным сплайном четвертого порядка (по данным киевского рынка межбанковских кредитов)

Для сглаживания кривой доходности используем данные по средним гривневым ставкам межбанковского кредитования (KIBOR) на 8 ноября 2001 г. Межбанковские кредиты будем считать инструментами с единственной выплатой (возврат суммы долга с процентами), что дает возможность непосредственного расчета спот-ставок и коэффициентов дисконтирования - таблица 4.4.

**Таблица 4.4** Значения KIBOR на 8.11.2001

Срок (дней)	Значение KIBOR (номинальная ставка, процен- тов годовых)	Спот-ставка с непрерывным сложным про- центом, процен- тов годовых	Коэффициент дисконтиро- вания
1	18,0	18,00	0,9995
7	21,7	21,65	0,9959
14	24,7	24,58	0,9906
30	28,3	27,98	0,9773
60	28,5	27,85	0,9552
90	32,5	31,26	0,9258

Источник: газета «Бизнес»

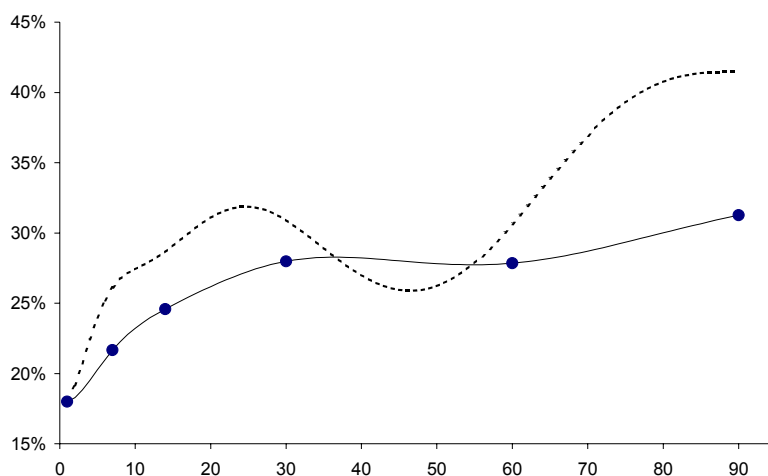
В качестве краткосрочной ставки используем значение ставки по однодневному кредиту:  $x_0 = 18,00\%$  годовых<sup>4</sup>, определяя тем самым значение параметра  $\alpha_0 = x_0 = 18,00\%$ . Решая систему (4.36) - (4.39), получим остальные параметры (таблица 4.5).

**Таблица 4.5** Параметры полиномиального сплайна четвертого порядка для ставок KIBOR гна 8.11.2001

Параметр	Значение
$\tilde{a}_1$	-0,59801
$\tilde{a}_2$	$-4,71639 \times 10^{-12}$
$\tilde{a}_3$	$2,10499 \times 10^5$
$\tilde{a}_4$	$-2,33411 \times 10^7$
$\tilde{b}_1$	$2,41765 \times 10^7$
$\tilde{b}_2$	$-9,83693 \times 10^5$
$\tilde{b}_3$	$1,6331 \times 10^5$
$\tilde{b}_4$	$-1,93685 \times 10^4$
$\tilde{b}_5$	$7,37748 \times 10^3$

Форвардная кривая, рассчитанная по формуле (4.35) и соответствующая ей кривая спот-ставок приведены на Рис. 4.6.

<sup>4</sup> В действительности использование ставки по кредитам овернайт для сглаживания кривой доходности, как правило, неоправданно и не рекомендуется специалистами, т.к. данная ставка формируется под действием большого числа *специфических* факторов (потребности в поддержании ликвидности, выполнение резервных требований, и т.п.) и поэтому необъективно отражает стоимость денег во времени. В данном примере мы используем ставку овернайт только в иллюстративных целях.



**Рис. 4.6** Кривая спот-ставок (сплошная линия) и форвардная кривая (прерывистая линия) киевского рынка МБК на 8 ноября 2001 г. Сглаживание осуществлено с использованием полиномиального сплайна четвертого порядка, обеспечивающего наибольшую гладкость форвардной кривой. По горизонтали — время в днях. Точками обозначены фактические значения ставок.

### Аппроксимация кривой доходности функциями Нельсона-Сигеля

Во многих случаях, при решении как теоретических, так и практических задач, сглаживание с использованием сплайнов оказывается слишком громоздким методом, перегруженным большим количеством параметров, не имеющих ясной экономической интерпретации. Другими словами, часто возникает задача аппроксимировать временную структуру процентных ставок с помощью одной, *простой по форме* функции, параметры которой имели бы определенный экономический смысл. Наиболее простой функцией такого типа можно считать форвардную кривую, предложенную Нельсоном и Сигелем (1985) [ ]

$$\varphi(t) = a_0 + (a_1 + a_2 t)e^{-bt}, \quad (4.40)$$

где  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b$  — параметры. Кривая спот-ставок, соответствующая (4.40) может быть записана как

$$x(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(s) ds = a_0 + \left( a_1 + \frac{a_2}{b} \right) \frac{1 - e^{-bt}}{bt} - \frac{a_2}{b} e^{-bt}. \quad (4.41)$$

Параметры  $a_0$  и  $a_1$  имеют ясную экономическую интерпретацию. Исходя из того, что

$$a_0 + a_1 = \lim_{t \rightarrow 0} x(t), \quad a_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t),$$

величины  $(a_0 + a_1)$  и  $a_0$  представляют собой соответственно мгновенную ( $t = 0$ ) и долгосрочную ( $t \rightarrow \infty$ ) спот-ставки.

Кривая коэффициентов дисконтирования для модели Нельсона-Сигеля запишется как

$$\delta(t) = \exp \left( -a_0 t - \left( a_1 + \frac{a_2}{b} \right) \frac{1 - e^{-bt}}{b} + \frac{a_2}{b} e^{-bt} t \right). \quad (4.42)$$

Параметры, как и ранее, выбираются таким образом, чтобы минимизировать сумму квадратов отклонений «теоретических» цен, рассчитанных с использованием коэффициентов (4.42), и фактических рыночных цен. Построение кривой Нельсона-Сигеля для киевского рынка МБК рассматривается в Примере 4.4.

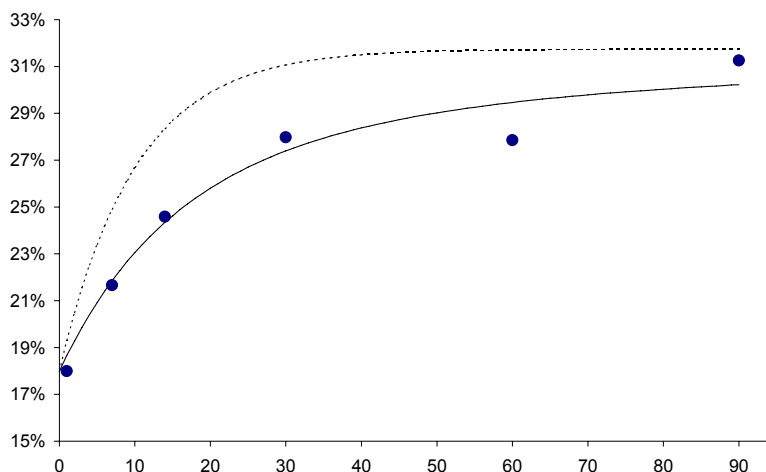
#### Пример 4.4 Сглаживание с использованием кривой Нельсона-Сигеля

Воспользуемся данными по киевскому рынку МБК из примера 4.3. Параметры  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b$  выберем таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений фактических ставок спот от теоретических (формула (4.41)) была минимальной. Кроме того, необходимо, чтобы выполнялось ограничение  $a_0 + a_1 = x_0$ , где  $x_0$  - фактическая краткосрочная спот-ставка (в нашем случае - 18,00% годовых). Методом наименьших квадратов получены следующие значения параметров:

Параметр	Значение
$a_0$	0,317519
$a_1$	-0,13756
$a_2$	-0,00022
$b$	36,48359

Графики кривой спот-ставок и форвардной кривой, соответствующие данным параметрам, приведены на Рис. 4.7. Отметим существенно *меньшую точность* аппроксимации по сравнению с использованием полиномиальных сплайнов (ср. Рис. 4.7 и 4.6). Это связано с тем, что кривая Нельсона-Сигеля лучше всего подходит для отображения «изгиба» в короткой части кривой, тогда как в рассматриваемом примере изгиб присутствует в правой части. Тем не менее, нельзя полностью отбрасывать данный метод прежде всего потому, что он дает более простую и интуитивно понятную форму форвардной кривой. Погоня за «абсолютной точностью» может быть не всегда оправданной. Более того, в данном примере «неточность» кривой Нельсона-Сигеля можно рассматривать как своего рода «сглаживание» неточно-

стей рыночных данных. Еще одним достоинством данного подхода является оценка для «долгосрочной» спот-ставки ( $a_0 = 31,75\%$  годовых, ставка с непрерывным сложным процентом), что может оказаться полезным для ряда практических задач.



**Рис. 4.7** Сглаживание кривой спот-ставок (сплошная линия) и форвардной кривой (прерывистая линия) киевского рынка МБК на 8 ноября 2001 г. с помощью функций Нельсона-Сигеля. Точками обозначены фактические значения спот-ставок.

Недостатком кривой Нельсона-Сигеля, является недостаточная точность, в частности, невозможность отобразить более чем один «изгиб» (локальный максимум или минимум) кривой доходности. Для более точной аппроксимации, можно использовать обобщения кривой Нельсона-Сигеля, простейшей из которых является *кривая Свенсона*, получаемая добавлением одного экспоненциального слагаемого

$$\varphi(t) = a_0 + (a_1 + a_2 t) \exp(-b_0 t) + a_3 t \exp(-b_1 t).$$

Максимальной гибкостью (и тем самым - максимальной точностью аппроксимации) обладают форвардные *кривые Бьёрка и Кристенсена*, представляющие собой сумму  $n+1$  слагаемых вида  $a_i(t) \exp(-b_i t)$ , где  $a_i(t)$  - полином определенного порядка (как правило 0, 1, 2 или 3-го). Обратной стороной гибкости является большое количество оцениваемых параметров и громоздкость задачи нелинейной оптимизации, которую необходимо решать для оценки параметров методом наименьших квадратов.



Еще одним возможным подходом является выбор формы кривой доходности, в точности соответствующий определенной теоретической модели динамики процентных ставок. Например, в соответствии с классической моделью Васичека кривая спот-ставок определяется формулой

$$x(t) = x_{\infty} + (x_0 - x_{\infty}) \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha t} + \frac{\sigma^2}{4\alpha t} \left( \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right)^2, \quad (4.43)$$

где

$$x_{\infty} = \mu - \frac{\lambda\sigma}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2},$$

- представляет собой долгосрочную ставку (здесь  $\mu$  - долгосрочное равновесное значение ставки  $x_0$ ,  $\sigma$  - волатильность краткосрочной ставки,  $\alpha$  - скорость возвратной тенденции к равновесному значению,  $\lambda$  - рыночная премия за риск; подробнее о параметрах модели Васичека см. Главу 7). Таким образом, чтобы построить спот-кривую, соответствующую модели Васичека, необходимо оценить три параметра ( $a_0, a_1, b$ ) функции

$$x(t) = a_0 + (x_0 - a_0) \frac{1 - e^{-bt}}{bt} + \frac{a_1}{4bt} \left( \frac{1 - e^{-bt}}{b} \right)^2. \quad (4.44)$$

Преимуществом такого подхода является то, что все параметры имеют ясную экономическую интерпретацию:  $a_0$  - долгосрочная ставка,  $a_1$  - волатильность краткосрочной ставки - параметр, одновременно характеризующий кривизну спот-кривой,  $b$  - параметр, определяющий скорость «возвратной тенденции» краткосрочной ставки к равновесному значению.

Спред между краткосрочной и долгосрочной ставками можно рассматривать как дополнительный параметр и оценивать параметры ( $a_0, a_1, a_2, b$ ) функции

$$x(t) = a_0 + a_2 \frac{1 - e^{-bt}}{bt} + \frac{a_1}{4bt} \left( \frac{1 - e^{-bt}}{b} \right)^2, \quad (4.44')$$

но такой подход несколько расходится с моделью Васичека.

### Выбор метода сглаживания в практических задачах

Ряд вопросов относительно сглаживания кривой доходности не имеет однозначно верных ответов - решение зависит от характера решаемой задачи и особенностей исходных рыночных данных.

Какую именно кривую необходимо сглаживать - кривую коэффициентов дисконтирования, спот-ставок или форвардную? Сглаживание *кривой коэффициентов дисконтирования* - наиболее простой с точки зрения прак-

тической реализации подход, т.к. решение сводится к линейной модели. В то же время, с точки зрения теории, более правильно сглаживать кривые *ставок доходности*, которые в теоретических моделях должны обладать определенными свойствами.

Какие формы кривых использовать? Если важна точность сглаживания - предпочтительней всего использовать кубические *B*-сплайны. Если, помимо точности, необходимо обеспечить гладкость форвардной кривой - используют полиномиальные сплайны четвертого порядка. В случае, когда требуется ясная содержательная интерпретация параметров, либо необходимо, чтобы оцениваемая кривая соответствовала определенной теории временной структуры процентных ставок, - оправданным выбором является кривая из семейства функций Бйорка-Кристенсена.

Какие методы оценки параметров наиболее предпочтительны? Так как точность аппроксимации в «краткосрочной» части кривых доходности предельно важны в абсолютном большинстве приложений, выбор обобщенного метода наименьших квадратов (когда весами выступают показатели дюрации) имеет существенные преимущества перед обычным МНК. В отдельных случаях оправданным может быть использование дополнительного критерия, обеспечивающего гладкость (подобного (4.28)).

### Анализ главных компонент динамики временной структуры

Выше речь шла о *состоянии* структуры процентных ставок во времени, т.е. о *статике*. Но не менее, если не более важны закономерности *динамики* временной структуры. Анализ главных компонент - статистический метод, позволяющий выявить *общие факторы* в колебаниях процентных ставок с различным сроком.

Пусть рассматривается набор спот-ставок  $x(t_i)$  для фиксированного набора сроков погашения  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Через  $\Delta x_i$  обозначим случайную величину - изменение ставки сроком  $t_i$  за единицу времени (например, день или неделю),  $\Delta \mathbf{x} = \{\Delta x_i\}_{i=1, \dots, n}$  - соответствующий случайный вектор,  $\overline{\Delta \mathbf{x}} = \{\overline{\Delta x_i}\}_{i=1, \dots, n}$  вектор средних значений (оцененных на основании массива наблюдений за случайными величинами  $\Delta x_i$ ). Определим вектор  $\boldsymbol{\chi} = \Delta \mathbf{x} - \overline{\Delta \mathbf{x}}$ , средние значения элементов которого по построению равны нулю ( $\overline{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0}$ ).  $\mathbf{V} = \{\sigma_{ij}\}_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$  - ковариационная матрица<sup>5</sup> вектора  $\boldsymbol{\chi}$ ,  $\sigma_{ij} = \text{Cov}(\chi_i, \chi_j)$ .

Главные компоненты случайного вектора  $\boldsymbol{\chi}$  - это набор взаимонезависимых (некоррелированных между собой) случайных величин  $y_i$

<sup>5</sup> Естественно, как и в случае средних значений, речь идет не о действительных (неизвестных) значениях коэффициентов ковариации, а о статистических оценках, полученных из того же массива исторических наблюдений.

( $i = 1, \dots, n$ ), являющиеся нормированными линейными комбинациями вектора  $\mathbf{x}$

$$y_i = \mathbf{c}'_i \mathbf{x}, \quad (4.45)$$

причем векторы  $\mathbf{c}_i$  выбраны таким образом, чтобы каждая последующая величина  $y_i$  (начиная с первой) имела максимальную возможную дисперсию. Нормирование означает, что векторы  $\mathbf{c}_i$  удовлетворяют условию

$$\mathbf{c}'_i \mathbf{c}_i = 1. \quad (4.46)$$

Если считать (по построению), что  $E[\mathbf{x}] = 0$ , то из (4.45) следует, что  $E[y_i] = 0$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Отсюда дисперсии величин  $y_i$  можно представить как

$$\text{Var}(y_i) = E[y_i^2] = \mathbf{c}'_i \mathbf{V} \mathbf{c}_i \quad (4.47)$$

Поиск первой главной компоненты сводится к нахождению вектора  $\mathbf{c}_1 \neq \mathbf{0}$ , максимизирующего (4.47) при условии (4.46) ( $i = 1$ ). Необходимым условием оптимальности для данной задачи является

$$\mathbf{V} \mathbf{c}_1 = \lambda_1 \mathbf{c}_1, \quad (4.48)$$

где  $\lambda_1$  - множитель Лагранжа. Согласно выражению (4.48)  $\lambda_1$  является собственным числом матрицы  $\mathbf{V}$  (причем, *наибольшим* собственным числом), а  $\mathbf{c}_1$  - соответствующий ему собственный вектор. Кроме того, из (4.48) следует, что  $\lambda_1 = \mathbf{c}'_1 \mathbf{V} \mathbf{c}_1$ , т.е.  $\lambda_1$  - это дисперсия первой главной компоненты.

Последующие главные компоненты выбираются аналогично<sup>6</sup>, с добавлением условия ортогональности, обеспечивающего некоррелированность главных компонент. Так, при поиске  $i$ -й главной компоненты, дополнительными ограничениями будут

$$\mathbf{c}'_{j-1} \mathbf{c}_i = 0, \quad j = 1, \dots, i-1. \quad (4.49)$$

Сумма собственных чисел  $\lambda_i$ , согласно известному свойству собственных чисел матрицы, равняется сумме чисел на главной диагонали матрицы  $\mathbf{V}$ , т.е. сумме дисперсий (полной дисперсии) случайного вектора  $\mathbf{x}$ . Тем самым, можно утверждать, что первая главная компонента объясняет долю полной дисперсии равную

$$\lambda_1 / \sum_{j=1}^n \lambda_j,$$

а первые  $k$  компонент отвечают за

<sup>6</sup> Если матрица  $\mathbf{V}$  является матрицей полного ранга, все собственные числа будут ненулевыми.

$$\sum_j^k \lambda_j / \sum_{j=1}^n \lambda_j$$

процентов полной дисперсии.

Обозначим через  $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$  матрицу, составленную из собственных векторов матрицы  $\mathbf{V}$  (векторов-столбцов  $\mathbf{c}_j$ )

$$\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \dots \quad \mathbf{c}_n].$$

Так как собственные векторы взаимортогональны ( $\mathbf{c}'_i \mathbf{c}_j = 0, i \neq j$ ) и  $\mathbf{c}'_i \mathbf{c}_i = 1$ , имеем  $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}'$ , т.е. вектор  $\boldsymbol{\chi}$  можно представить как

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{C}\mathbf{y}, \quad (4.50)$$

где  $\mathbf{y} = \{y_i\}_{i=1, \dots, n}$  - вектор, состоящий из главных компонент, упорядоченных по величине дисперсии. Каждый элемент матрицы  $\mathbf{C}$ ,  $c_{ij}$  - можно интерпретировать как *чувствительность*  $i$ -го элемента вектора  $\boldsymbol{\chi}$  к  $j$ -й главной компоненте. Если элементы вектора  $\boldsymbol{\chi}$  находятся под существенным влиянием небольшого числа общих факторов, т.е. первые  $k$  компонент ( $k \ll n$ ) могут объяснять большую (скажем, 90% или более) долю полной дисперсии, и каждый элемент вектора  $\boldsymbol{\chi}$  может быть представлен как

$$\chi_i = \sum_{j=1}^k c_{ij} y_j + \varepsilon_i, \quad (4.51)$$

где  $\varepsilon_i$  - случайная ошибка (влияние остальных компонент), которой в определенных случаях можно пренебречь.

Использование ковариационной матрицы при поиске главных компонент обладает существенным недостатком - результат зависит от масштаба и единиц измерения исходных данных. Избавиться от такого влияния (что на практике предпочтительно) можно перейдя от ковариационной к корреляционной матрице. Для этого определим вектор  $\tilde{\boldsymbol{\chi}} = \{\tilde{\chi}_i\}_{i=1, \dots, n}$ , элементы которого равны  $\tilde{\chi}_i = \chi_i / \sigma_i$  (здесь  $\sigma_i$ , как и ранее, - стандартное отклонение  $\chi_i$ ), и, тем самым, имеют единичные дисперсии. Ковариационная матрица вектора  $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$  - это одновременно корреляционная матрица вектора  $\boldsymbol{\chi}$ . Обозначим ее через  $\mathbf{R} = \{\rho_{ij}\}_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$ , где  $\rho_{ij} = \text{Corr}(\chi_i, \chi_j)$  - коэффициенты корреляции. Пусть  $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$  - собственные числа матрицы  $\mathbf{R}$ , расположенные в порядке убывания,  $\tilde{\mathbf{c}}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) - соответствующие им собственные векторы,  $\tilde{\mathbf{C}} = \{\tilde{c}_{ij}\}_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$  - матрица, состоящая из собственных векторов,  $\tilde{\mathbf{y}} = \{\tilde{y}_i\}_{i=1, \dots, n}$  - главные компоненты вектора  $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$ . Так как элементы главной диагонали матрицы  $\mathbf{R}$  равны единице, то

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = n,$$

соответственно, доля полной дисперсии случайного вектора  $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$ , объясняемая  $i$ -й главной компонентой, равна  $\lambda_i / n$ . Используя главные компонен-

ты, элементы исходного вектора  $\Delta x$  (приросты спот-ставок в единицу времени) могут быть представлены как

$$\Delta x_i \cong \bar{\Delta x}_i + \sigma_i \sum_{j=1}^k \tilde{c}_{ij} \tilde{y}_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.52)$$

где  $k < n$  выбрано таким образом, чтобы первые  $k$  главных компонент объясняли значительную (скажем, не менее 90%) долю полной дисперсии. Тем самым, достигается цель сокращения количество факторов, описывающих динамику кривой доходности (факторов риска).

Пример 4.5 иллюстрирует поиск главных компонент по данным киевского рынка межбанковских кредитов.

**Пример 4.5** Анализ главных компонент динамики процентных ставок киевского рынка МБК

Для расчетов используем данные о ставках KIBOR за период с июня 1997 по ноябрь 2001 г. (см. Рис. 2.5 в Главе 2). Исходной информацией (наблюдения за вектором  $\Delta x$  в используемых выше обозначениях) являются недельные изменения ставок (в пересчете на непрерывный сложный процент) сроком 1 день, 1 неделя, 2 недели, 1, 2 и 3 месяца. Оценки коэффициентов корреляции (корреляционная матрица) по данным за весь период содержится в таблице 4.6.

**Таблица 4.6** Коэффициенты корреляции ставок KIBOR

Срок	1 день	1 нед.	2 нед.	1 мес.	2 мес.	3 мес.
1 день	1					
1 нед.	0,978	1				
2 нед.	0,949	0,980	1			
1 мес.	0,866	0,919	0,958	1		
2 мес.	0,641	0,720	0,769	0,824	1	
3 мес.	0,560	0,642	0,698	0,765	0,958	1

Высокие значения коэффициентов корреляции неудивительны, т.к. использованы доступные данные по ставкам с очень близкими сроками. Это является признаком того, что первые 1-2 главные компоненты будут объяснять существенную долю колебаний. Результаты анализа главных компонент приведены в таблице 4.7.

**Таблица 4.7** Анализ главных компонент киевского рынка МБК, 1997 - 2001

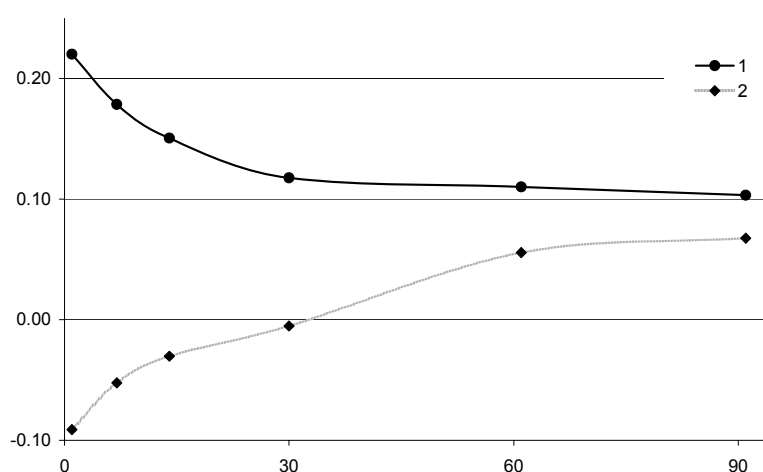
Компоненты	1	2	3	4	5	6
Собственное число	5,0904	0,7538	0,0916	0,0362	0,0181	0,0097
Доля полной дисперсии	84,84%	12,56%	1,53%	0,60%	0,30%	0,16%
Кумулятивная доля	84,84%	97,40%	98,93%	99,53%	99,84%	100%
<i>Собственные векторы:</i>						
1 день	0.9107	-0.3768	0.1477	0.0095	0.0764	0.0290
1 нед.	0.9540	-0.2804	0.0612	-0.0038	-0.0448	-0.0746

2 нед.	0.9740	-0.1957	-0.0502	0.0057	-0.0854	0.0572
1 мес.	0.9680	-0.0429	-0.2405	0.0123	0.0540	-0.0130
2 мес.	0.8828	0.4458	0.0410	-0.1425	0.0061	0.0035
3 мес.	0.8283	0.5426	0.0634	0.1248	-0.0016	-0.0018

Как видим, первая главная компонента объясняет около 85% колебаний процентных ставок, две первые - 97%. Значения элементов собственных векторов, определяющих чувствительность соответствующих процентных ставок к изменениям компонент, позволяют дать первым двум компонентам традиционную содержательную интерпретацию. Первая (относительно стабильные чувствительности) отвечает за общий *уровень* процентных ставок, вторая - за *наклон* кривой доходности. Значение третьей (традиционно интерпретируемой как *кривизна* кривой доходности) ничтожно мало по причине небольшого количества и коротких сроков анализируемых ставок. Собственно показатели чувствительности равны, в соответствии с (4.52) произведению элементов собственных векторов на стандартные отклонения приростов ставок (см. табл. 4.8 и Рис. 4.8).

**Таблица 4.8** Чувствительность процентных ставок к главным компонентам

	Станд. отклон.	1	2	3
1 день	24.17%	0.2201	-0.0911	0.0357
1 нед.	18.72%	0.1786	-0.0525	0.0115
2 нед.	15.47%	0.1507	-0.0303	-0.0078
1 мес.	12.14%	0.1175	-0.0052	-0.0292
2 мес.	12.48%	0.1102	0.0556	0.0051
3 мес.	12.45%	0.1031	0.0675	0.0079



**Рис. 4.8** Чувствительность процентных ставок киевского рынка МБК к первым двум главным компонентам.

