V. Дюрация

Дюрация (*продолжительность*) является важнейшим показателем подверженности долгового инструмента влиянию риска процентной ставки. Дюрация широко используется в методах ограничения (хеджирования) данного риска. Существует несколько показателей дюрации, особенности которых рассматриваются в настоящей главе.

Дюрация как функция доходности к погашению

Пусть рассматривается инструмент с платежами $C_1, C_2, \dots, C_n$ в моменты времени 1,2, ..., n. Рыночная цена инструмента равна P. Цена может быть представлена как функция доходности к погашению y:

$$P(y) = \sum_{t=1}^{n} (1+y)^{-t} C_t$$

Дюрация в денежном выражении - это просто производная цены по доходности к погашению:

$$\frac{dP(y)}{dy} = -\sum_{t=1}^{n} t(1+y)^{-(t+1)} C_t \,, \tag{5.1}$$

она измеряет абсолютное изменение цены в ответ на изменение величины доходности к погашению. Данная зависимость является нелинейной. Соответственно, производная dP/dy, являясь тангенсом угла наклона касательной к функции $P(y)$ в данной точке, является *линейной аппроксимацией* зависимости цены P от доходности к погашению y (см. рис. 5.1). Дюрация в денежном выражении является отрицательной вследствие обратной зависимости цены от доходности.

Вариант формулы (5.1) для непрерывного времени аналогичен. Если платежи $C_1, C_2, \ldots, C_n$ поступают в произвольные моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$, дюрация в денежном выражении рассчитывается как:

$$\frac{dP(y)}{dy} = \sum_{j=1}^{n} t_j (1+y)^{-(t_j+1)} C_j . \qquad (5.1')$$

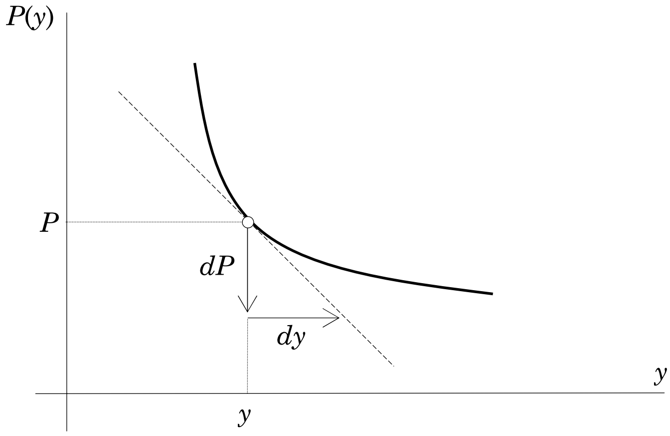

Рис. 5.1. Зависимость цены долгового обязательства от доходности к погашению. Дюрация в денежном выражении является тангенсом угла наклона касательной к кривой $P(y)$, т.е., другими словами, - линейной аппроксимацией изменения цены в ответ на изменение доходности.

Дюрацией Маколея (по имени Фредерика Маколея, впервые исследовавшего взаимосвязи цены и доходности и предложившено показатель дюрации) принято называть величину dP/dy с обратным знаком, умноженную на $(1+y)$ и деленную на цену P:

$$D = -\frac{dP}{dy}\frac{(1+y)}{P} = \sum_{j=1}^{n} t_j (1+y)^{-t_j} \frac{C_j}{P} \qquad (5.2)$$

Величина D, определенная по формуле (5.2), имеет ясную содержательную интерпретацию: это взвешенный по дисконтированным объемам выплат *средний срок потока платежей* по данному инструменту (отсюда и название - продолжительность или дюрация). Одновременно, D - это взятая с обратным знаком *эластичность* цены по величине $(1+y)$.

Дюрация может использоваться для приближенной оценки относительного изменения цены в ответ на небольшие изменения доходности. Действительно, из соотношения (5.2) может быть получена приближенная формула:

$$\frac{\Delta P}{P} \cong \frac{D}{1+y}\Delta y\,. \qquad (5.3)$$

Величину $\overline{D} = D/(1+y)$ - относительное изменение цены при изменении доходности к погашению на единицу, называют *модифицированной продолжительностью*.

Дюрация Фишера-Вайля

Показатели дюрации, рассчитываемые как функции доходности к погашению, имеют существенный недостаток. Доходность к погашению y - это характеристика определенного инструмента, тогда как с практической точки зрения более важно знать - как изменится цена при изменении *рыночных процентных ставок*.

Пусть известна функция цен простых дисконтных облигаций $p(t)$, где t - время погашения. Рыночная цена произвольного инструмента с фиксированным доходом может быть представлена как:

$$P = \sum_{j=1}^{n} p(t_j)C_j\,.$$

Через $x(t)$ обозначим кривую спот-ставок (с непрерывным сложным процентом), т.е. $p(t) = e^{x(t)t}$. Предположим, что любая спот-ставка может быть представлена как сумма краткосрочной ставки x и спреда $s(t)$, зависящего от времени t:

$$x(t) = x + s(t)\,,$$

причем величины спрэдов *постоянны*. Последнее означает, что возможны исключительно *параллельные* сдвиги кривой спот-ставок - когда ставки для всех сроков меняются на одинаковую величину. Величина:

$$\frac{dP}{dx} = -\sum_{j=1}^{n} t_j e^{-x(t)t} C_j$$

является аналогом дюрации в денежном выражении и измеряет *абсолютное* изменение цены инструмента в ответ на параллельный сдвиг кривой спот-ставок. *Дюрацией Фишера-Вайля* называют величину *относительного* изменения цены в ответ на параллельное изменение структуры процентных ставок:

$$\mathcal{D} = -\frac{1}{P}\frac{dP}{dx} = \sum_{j=1}^{n} t_j p(t_j)C_j \Bigg/ \sum_{j=1}^{n} p(t_j)C_j\,. \qquad (5.4)$$

Дюрация Фишера-Вайля, как и дюрация Маколея (5.2), измерят *средний срок потока платежей*[1], но, в отличие от последней, в качестве ставок дисконтирования используются спот-ставки $x(t_j)$.

Дюрация портфеля

Показатель продолжительности может рассчитываться как для отдельного инструмента, так и для *портфеля* долговых обязательств. Пусть в портфель входит K различных долговых инструментов, $k = 1,2,\ldots,K$ - номер инструмента, Z_k - количество k-х инструментов в портфеле (штук), P_k - рыночная цена, C_{kt} - размер выплаты по k-му инструменту в период времени t ($t = 1,2,\ldots,n$, т.е. время считаем *дискретным*). Дюрацией портфеля по определению (формула (5.4)) будет величина:

$$\mathcal{D}_\Pi = \sum_{t=1}^{n} t p_t \sum_{k=1}^{K} Z_k C_{kt} \Bigg/ \sum_{t=1}^{n} p_t \sum_{k=1}^{K} Z_k C_{kt} .$$

Обозначив через z_k долю k-го инструмента в общей стоимости портфеля:

$$z_k = Z_k P_k \Bigg/ \sum_{j=1}^{K} Z_j P_j ,$$

и принимая во внимание, что:

$$\mathcal{D}_k = \sum_{t=1}^{n} t p_t C_{kt} \Bigg/ P_k ,$$

получим следующее выражение для продолжительности портфеля:

$$\mathcal{D}_\Pi = \sum_{k=1}^{K} z_k \mathcal{D}_k , \tag{5.5}$$

т.е. *дюрация портфеля есть взвешенная по объемам инвестиций дюрация входящих в данный портфель инструментов*. Как и для отдельного инструмента, продолжительность портфеля является показателем, характеризующим изменение стоимости (в нашем случае, одновременно, - и рыночной

[1] Согласно Девентеру и Имаи [ ], именно дюрация как *изменение цены при параллельном сдвиге кривой доходности* (т.е. определенная в соответствии с формулой (5.4)) и должна называться дюрацией Маколея, т.к. в точности соответствует предложенному им показателю для измерения среднего времени погашения (и одновременно - процентного риска) долгового инструмента. Дюрацию как функцию доходности к погашению (формула (5.2)) авторы называют *рыночной*, в том смысле, что данный подход расчета является более простым (не нужна информация о структуре процентных ставок) и, как следствие - наиболее распространенным на финансовых рынках, хотя и не вполне подходящим для задач хеджирования процентного риска. Тем не менее, чтобы не вносить путаницу, мы в соотвествии со сложившейся традицией (хотя, возможно, в ущерб исторической правоте) дюрацией Маколея будем называть величину, рассчитываемую по формуле (5.2), а дюрацией Фишера-Вайля - показатель (5.4).

цены) портфеля в ответ на небольшой *параллельный* сдвиг кривой рыночных спот-ставок.

Дюрация как инструмент хеджирования

Рассмотрим следующую задачу. Инвестор владеет Z_A единиц долгового инструмента A, сегодняшняя рыночная цена которого равна P_A. Кредитный риск *полностью* отсутствует, - это означает, что снижение стоимости инвестиций может быть вызвано исключительно колебаниями рыночных процентных ставок. Необходимо выбрать объем инвестиций в инструмент B (который также не подвержен кредитному риску) таким образом, чтобы стоимость суммарных инвестиций оставалась постоянной в случае неожиданного изменения рыночных процентных ставок. Если Z_B - количество единиц актива B в портфеле, совокупная стоимость портфеля будет равна $P_П = Z_A P_A + Z_B P_B$.

Предположим, что возможны исключительно параллельные сдвиги кривой спот-ставок. При относительно небольшом изменении краткосрочной ставки x, цена портфеля изменится на величину:

$$\frac{dP_П}{dx} = Z_A \frac{dP_A}{dx} + Z_B \frac{dP_B}{dx}.$$

Хеджирование процентного риска означает, что нужно подобрать величину Z_B таким образом, чтобы стоимость портфеля при небольших изменениях процентных ставок не менялась, т.е $dP_П / dx = 0$. Последнее означает, что искомая величина Z_B должна удовлетворять условию:

$$\frac{Z_B}{Z_A} = -\frac{dP_A}{dx} \Big/ \frac{dP_B}{dx}.$$

Величину $h = Z_B P_B / Z_A P_A$ - отношение стоимости инвестиций в инструмент хеджирования к стоимости страхуемого актива, - назовем *коэффициентом хеджирования*. В случае, когда возможны исключительно небольшие параллельные сдвиги кривой доходности, оптимальный коэффициент хеджирования (используем соотношение (5.4)) равен отношению показателей дюрации с обратным знаком:

$$h = Z_B P_B / Z_A P_A = -\mathfrak{D}_A / \mathfrak{D}_B . \tag{5.6}$$

Коэффициент хеджирования в формуле (5.6) показывает - сколько гривен должно быть вложено в инструмент B в расчете на каждую гривну вложений в инструмент A чтобы полностью обезопасить стоимость совокупных инвестиций от относительно *небольших параллельных* изменений структуры процентных ставок.

Как уже отмечалось, для расчета дюрации Фишера-Вайля необходимы данные о кривой доходности, в то время как при использовании т.н. рыночном подхода (формула (5.2)) никакой дополнительной информации не требуется - достаточно знать потоки платежей и рыночную цену инструмента. Поэтому на практике в качестве коэффициента хеджирования часто предлагают использовать отношение показателей модифицированной продолжительности:

$$h_y = -\overline{D}_A \big/ \overline{D}_B = -\left(\frac{1}{P_A}\cdot\frac{dP_A}{dy_A}\right) \Bigg/ \left(\frac{1}{P_B}\cdot\frac{dP_B}{dy_B}\right). \tag{5.7}$$

Данная формула для коэффициента хеджирования даст точно такой же как и выражение (5.6) результат в случае *плоской* кривой доходности - когда процентные ставки для всех сроков равны (и, в частности, $y_A = y_B$). В остальных случаях последний подход не вполне точен. Иллюстрация различных способов расчета дюрации и коэффициентов хеджирования приведена в примере 5.1.

Пример 5.1. Расчет дюрации и коэффициентов хеджирования

Проиллюстрируем расчет показателей дюрации на примере облигации федерального займа с фиксированным купонным доходом (ОФЗ-ФК) серии 27004 с погашением 18.09.2002 г. (см. пример 3.2. на стр.). Обозначим данную облигацию индексом *I*. Сегодняшним днем как и прежде считаем 7 сентября 2001 г. Рыночная цена облигации равна 105,19 руб. за 100 руб. номинальной стоимости. Платежи по данной облигации приведены в таблице:

Дата	*Дней* от сегодняшнего момента	*Лет* от сегодняшнего момента (t)	Объем выплаты, руб. в расчете на 100 руб. номинала	Коэффициент дисконтирования, $p(t)$	Спот-ставка, $x(t)$, % годовых
19.09.2001	12	0,033	5,00	0,9962	11,70
19.12.2001	103	0,282	3,70	0,9652	12,55
20.03.2002	194	0,532	3,70	0,9309	13,48
19.06.2002	285	0,781	3,70	0,8984	13,72
18.09.2002	376	1,030	103,70	0,8666	13,90

Коэффициенты дисконтирования и ставки спот в последних двух колонках - результат сглаживания кривой коэффициентов дисконтирования с помощью кубических сплайнов (см. Пример 4.? в предыдущей главе).

Доходность к погашению рассматриваемой облигации является решением уравнения:

$$105.19 = \frac{5{,}0}{(1+y)^{0{,}033}} + \frac{3{,}7}{(1+y)^{0{,}282}} + \frac{3{,}7}{(1+y)^{0{,}532}} + \frac{3{,}7}{(1+y)^{0{,}781}} + \frac{103{,}7}{(1+y)^{1{,}030}}$$

и равна 14,87% годовых - в данном случае это ставка с годовым (дискретным) сложным процентом. Дюрация Маколея данной облигации в соответствии с формулой (5.2) равняется:

$$D_I = \frac{1}{105{,}19} \cdot \left[\frac{0{,}033 \cdot 5{,}0}{1{,}1487^{0{,}033}} + \frac{0{,}282 \cdot 3{,}7}{1{,}1487^{0{,}282}} + \frac{0{,}532 \cdot 3{,}7}{1{,}1487^{0{,}532}} + \frac{0{,}781 \cdot 3{,}7}{1{,}1487^{0{,}781}} + \frac{1{,}030 \cdot 103{,}7}{1{,}1487^{1{,}030}} \right]$$
$$= 0{,}9335 \quad \text{года},$$

- как видим, дюрация несколько меньше срока погашения облигации - что всегда характерно для инструментов с более чем одной выплатой. Модифицированная продолжительность равняется:

$$\overline{D}_I = 0{,}933/1.1487 = 0.8122 \, ,$$

- т.е. если доходность к погашению изменится на 1%, цена облигации изменится *приблизительно* (т.к. это лишь линейная аппроксимация) на 0,8122%.

Более точным показателем средней продолжительности облигации является, как уже отмечалось, дюрация Фишера-Вайля, равная в данном случае (формула (9.4)):

$$\mathfrak{D}_I = \frac{1}{105{,}19}\left(0{,}9962 \cdot 5{,}0 + 0{,}9652 \cdot 3{,}7 + 0{,}9309 \cdot 3{,}7 + 0{,}8984 \cdot 3{,}7 + 0{,}8666 \cdot 103{,}7\right)$$
$$= 0.9333 \quad \text{года}$$

Таким образом, в нашем примере значения показателей дюрации Маколея и Фишера-Вайля оказались очень близки между собой. В том числе и по этой причине практики часто отдают предпочтение дюрации Маколея, которую проще посчитать (как минимум, не требуется дополнительная информация о временной структуре процентных ставок). Тем не менее, чем большим является наклон кривой доходности, и чем выше размеры промежуточных выплат, - тем большими могут быть отличия значений дюрации при разных методах расчета. Кроме того, если дюрация Фишера-Вайля отражает процентное изменение цены при небольшом параллельном сдвиге спот-ставок, то дюрация Маколея не является показателем изменения цены при небольшом изменении доходности к погашению - этой цели служит модифицированная дюрация.

В качестве инструмента хеджирования возьмем облигацию ОФЗ-ФК серии 27011 с погашением 8 октября 2003 г. Используем для данного инструмента индекс *II*. Рыночная цена равна $P_{II} = 95{,}40$, платежи приведены в таблице:

Дата	*Дней* от сегодняшнего момента	*Лет* от сегодняшнего момента (*t*)	Объем выплаты, руб. в расчете на 100 руб. номинала	Коэффициент дисконтирования, *p*(*t*)	Спот-ставка, *x*(*t*), % годовых
10.10.2001	33	0,090	3,70	0,9895	11,70
09.01.2002	124	0,340	3,70	0,9572	12,87
10.04.2002	215	0,589	3,70	0,9232	13,56
10.07.2002	306	0,838	3,70	0,8911	13,76
09.10.2002	397	1,088	2,50	0,8592	13,95

08.01.2003	488	1,337	2,50	0,8264	14,26
09.04.2003	579	1,586	2,50	0,7919	14,71
09.07.2003	670	1,836	2,50	0,7550	15,31
08.10.2003	761	2,085	102,50	0,7161	16,01

Доходность к погашению облигации *II* равняется 17,15% годовых, дюрация Маколея, модифицированная дюрация и дюрация Фишера-Вайля равны соответственно:

$$D_{II} = 1{,}7964\ ,\ \ \overline{D}_{II} = 1{,}5334\ ,\ \ \mathfrak{D}_{II} = 1{,}7930\ .$$

Используя полученные показатели дюрации, рассчитаем коэффициент хеджирования, основанный на показателе Фишера-Вайля (формула (5.6)):

$$h = -0.9333/1.7930 = -0{,}5205\ .$$

Полученный результат означает, что для страхования процентного риска (т.е. неожиданных колебаний стоимости инвестиций, связанных с изменениями рыночных процентных ставок) необходимо на каждый рубль, инвестированный в облигации *I*, *коротко продать* облигаций *II* на сумму 0,5205 руб. Если, например, инвестор владеет 10 тыс шт. облигаций *I* на общую сумму 10000×105,19=1051900 руб., для хеджирования необходимо *коротко продать* 0,5205×1051900/95,4 ≈ 5739 шт. облигаций *II*. Подчеркнем, что данный хедж будет эффективным *только* для небольших и *только* параллельных сдвигов кривой доходности. Если процентные ставки изменятся значительно, либо изменение будет непараллельным (например краткосрочные ставки снизятся, а долгосрочные - возрастут) - хеджирование не обеспечит страхование от потерь. Кроме того, напомним, что короткие продажи облигаций на реальном рынке могут быть недоступны - тогда для страхования процентного риска нужно использовать специальные инструменты - например, форвардные либо фьючерсные контракты (см. Главу 9), тем не менее, принципы расчета коэффициентов хеджирования останутся неизменными.
Коэффициент хеджирования, основанный на модифицированной дюрации (формула (5.7)) будет равен:

$$h_y = -0{,}8122/1.5334 = -0.5297\ .$$

Отличие h_y от h не очень существенно. Тем не менее в случаях, когда кривая доходности имеет значительный наклон (сильно отличается от плоской), хеджирование, основанное на последнем коэффициенте, может не обезопасить от потерь даже при небольших и параллельных изменениях рыночных процентных ставок.

Выпуклость

Одним из недостатков показателей продолжительности как меры подверженности инструмента процентному риску является то, что дюрация - лишь *линейная* аппроксимация зависимости цены от процентной ставки, в то время как данная функция является нелинейной.

Рассмотрим цену долгового инструмента как функцию доходности к погашению: $P(y)$. Относительный прирост цены при небольшом изменении y может быть представлен с помощью разложения в ряд Тейлора:

$$\frac{P(y+\Delta y)-P(y)}{P(y)}=\left[\frac{1}{P(y)}\frac{dP(y)}{dy}\right]\Delta y+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{P(y)}\frac{d^2P(y)}{dy^2}\right](\Delta y)^2+o\left((\Delta y)^2\right),$$

или:

$$\frac{P(y+\Delta y)-P(y)}{P(y)}=-\overline{D}\Delta y+\frac{1}{2}\overline{C}(\Delta y)^2+o\left((\Delta y)^2\right) \tag{5.8}$$

где: $\overline{D}$ - модифицированная продолжительность, $\overline{C}$ - *выпуклость*, которая для инструмента с платежами $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$, если доходность к погашению y рассчитывается как ставка с дискретным сложным процентом, равна:

$$\overline{C}=\frac{1}{P}\frac{d^2P}{dy^2}=\frac{1}{P}\sum_{j=1}^{n}t_j^2(1+y)^{-(t_j+2)}C_j\,. \tag{5.9}$$

Первые два слагаемых правой части выражения (5.8) являются квадратичной аппроксимацией функции $P(y)$. Соответствующая графическая иллюстрация приведена на рис. 5.2.

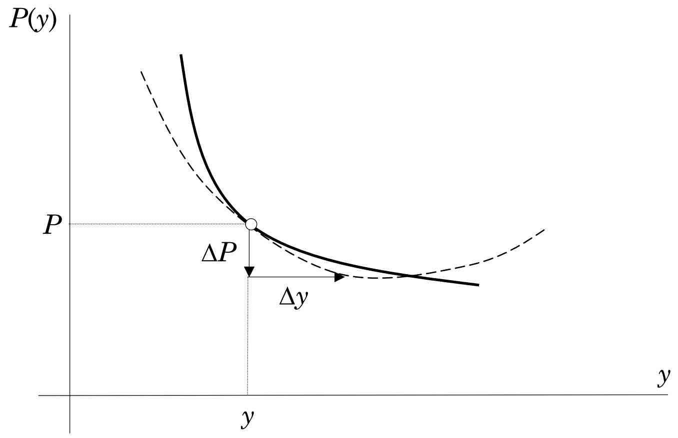

Рис. 5.2. Квадратичная аппроксимация зависимости цены от доходности.

Выпуклость, как и дюрацию, можно представить в форме Фишера-Вайля. Для этого цену долгового инструмента будем считать функцией краткосрочной ставки x и предполагать, как и ранее, что возможны лишь параллельные сдвиги структуры процентных ставок. Квадратичная аппроксимация относительного изменения цены при параллельном сдвиге процентных ставок запишется как:

$$\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{P(x)} \cong -\left[\frac{1}{P(x)}\sum_{j=1}^{n} t_j p(t_j) C_j\right]\Delta x + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{P(x)}\sum_{j=1}^{n} t_j^2 p(t_j) C_j\right](\Delta x)^2 ,$$

где: C_j - платежи в моменты времени t_j ($j = 1,2,\ldots,n$), $p(t_j) = \exp(-x(t_j)t_j)$ - функция дисконтирования, спот-ставки могут быть выражены как $x(t_j) = x + s(t_j)$, причем размеры спредов $s(t_j)$ - константы. Выражение в квадратных скобках во втором слагаемом - это выпуклость в форме Фишера-Вайля:

$$\mathcal{C} = \sum_{j=1}^{n} t_j^2 p(t_j) C_j \Bigg/ \sum_{j=1}^{n} p(t_j) C_j \ , \qquad (5.10)$$

т.е. пророст цены при сдвиге процентных ставок можно записать:

$$\frac{\Delta P}{P} \cong -\mathcal{D} \cdot \Delta x + \frac{1}{2}\mathcal{C} \cdot (\Delta x)^2 \ . \qquad (5.11)$$

Выпуклость и хеджирование

Использование показателя выпуклости позволяет более точно хеджировать процентный риск, - в том смысле, что хедж оказывается эффективным для более значительных изменений процентных ставок. Тем самым, не возникает необходимости постоянных корректировок позиций при изменениях процентных ставок.

Пусть, как и прежде, инвестор владеет Z_A единиц актива *A*. Необходимо выбрать хедж таким образом, чтобы стоимость совокупного портфеля P_Π была застрахована от параллельных сдвигов процентных ставок, т.е.:

$$\frac{\Delta P_\Pi}{P_\Pi} \cong -\mathcal{D}_\Pi \cdot \Delta x + \frac{1}{2}\mathcal{C}_\Pi \cdot (\Delta x)^2 = 0 \ , \qquad (5.12)$$

($\mathcal{D}_\Pi$ и $\mathcal{C}_\Pi$ - соответственно дюрация и выпуклость портфеля). Для хеджирования в данном случае необходимо использовать как минимум *два* дополнительных инструмента - чтобы одновременно выполнялись условия $\mathcal{D}_\Pi = 0$ и $\mathcal{C}_\Pi = 0$. Пусть для хеджирования выбраны инструменты *B* и *C*, Z_B и Z_C - искомое количество единиц каждого из них в портфеле. Стоимость портфеля таким образом может быть представлена как суммарная стоимость его компонент:

$$P_\Pi = Z_A P_A + Z_B P_B + Z_C P_C = P_\Pi (z_A + z_B + z_c) \ ,$$

здесь z_A, z_B и z_C - *доли* инвестиций в каждый из инструментов в общей стоимости портфеля (очевидно, что $z_A + z_B + z_C = 1$). Продолжительность портфеля, как было показано выше, есть взвешенная по пропорциям инвестиций в каждый инструмент сумма дюраций компонентов портфеля:

$$\mathcal{D}_П = z_A\mathcal{D}_A + z_B\mathcal{D}_B + z_C\mathcal{D}_C .$$

Нетрудно убедиться, что выпуклость портфеля может быть рассчитана аналогично:

$$\mathcal{C}_П = z_A\mathcal{C}_A + z_B\mathcal{C}_B + z_C\mathcal{C}_C .$$

Приравняв два последних выражения к нулю, получим систему уравнений, решение которой (значения z_B и z_C) обеспечит выполнение условия (5.12). Перепишем данную систему, введя обозначения для *коэффициентов хеджирования* $h_B = z_B / z_A$ и $h_C = z_C / z_A$ (h_B и h_C представляют собой отношение инвестиций в инструменты хеджирования к инвестициям в хеджируемый актив A):

$$\mathcal{D}_A = -h_B\mathcal{D}_B - h_C\mathcal{D}_C,$$
$$\mathcal{C}_A = -h_B\mathcal{C}_B - h_C\mathcal{C}_C.$$

Решением задачи будет:

$$h_B = -\frac{\mathcal{D}_C\mathcal{C}_A - \mathcal{D}_A\mathcal{C}_C}{\mathcal{D}_B\mathcal{C}_C - \mathcal{D}_C\mathcal{C}_B},\ h_C = -\frac{\mathcal{D}_B\mathcal{C}_A - \mathcal{D}_A\mathcal{C}_B}{\mathcal{D}_B\mathcal{C}_C - \mathcal{D}_C\mathcal{C}_B}.$$

Ниже приведен пример расчета коэффициентов хеджирования с использованием показателей выпуклости.

Пример 5.2. Расчет коэффициентов хеджирования с использованием показателей продолжительности и выпуклости

Используем следующую информацию об облигациях федерального займа РФ из примера 3.2 (данные на 7 сентября 2001 г.):

Инструмент	ОФЗ-ПД 26003	ОФЗ-ФК 27004	ОФЗ-ФК 27011
Индекс инструмента, i	1	2	3
Дата погашения	15.03.2005	18.09.2002	8.10.2003
Срок погашения, лет	3,521	1,030	2,085
Цена, P_i	80,72	105,19	95,40
Доходность к погашению, %	20,09	14,87	17,15
Продолжительность Маколея	2,9162	0,9335	1,7964
Модифицированная продолжительность	2,4283	0,8126	1,5335
Выпуклость	8,6852	1,4183	3,9176
Продолжительность Фишера-Вайля	2,8944	0,9333	1,7930
Выпуклость Фишера-Вайля	9,5062	0,9379	3,5702

Пусть необходимо составить портфель, состоящий исключительно из облигаций данных трех типов. Общий объем инвестиций равняется 10 млн. руб. Портфель должен быть хеджирован от параллельных сдвигов кривой доходности. Выберем (произвольно) в качестве хеджируемого инструмента облигацию 1 (ОФЗ-ПД 26003) и рассчитаем коэффициенты хеджирования[2]:

$$h_2 = -\frac{1{,}7930 \cdot 9{,}5062 - 2{,}8944 \cdot 3{,}5702}{0{,}9333 \cdot 3{,}5702 - 1{,}7930 \cdot 0{,}9379} = 4{,}0663\,,\ h_3 = -3{,}7309\,.$$

Доля от общего объема инвестиций в первый вид облигаций (ОФЗ-ПД 26003) будет равна:

$$z_1 = 1/(1 + h_2 + h_3) = 0{,}7488\,,$$

откуда получим доли вложений во второй и третий вид облигаций (ОФЗ-ФК 27004 и 27011 соответственно):

$$z_2 = h_2 z_1 = 3{,}0450\,,\ z_3 = h_3 z_1 = -2{,}7938\,.$$

Таким образом, если общий объем инвестиций составляет 10 млн. руб., для того, чтобы хеджировать процентный риск, необходимо инвестировать 7,488 млн. руб в облигации 1, 30,450 млн. руб. - в облигации 2, и коротко продать облигации 3 на сумму 27,938 млн. руб. Если такой портфель *действительно* удастся создать, и если на следующий день произойдет даже достаточно существенное параллельное изменение процентных ставок (в ту или иную сторону) стоимость портфеля не отклонится существенно от вложенных инвестором 10 млн. руб. Сравним эффективность данной стратегии хеджирования с подходом, основанном только на показателе дюрации (Пример 5.1), а также с вариантами, когда хеджирование не применяется и все средства инвестируются только в один вид облигаций. Результаты сравнения приводятся в таблице::

Изменение (параллельное) процентных ставок	Изменение стоимости портфеля в % к первоначальной стоимости				
	Портфель, хеджированный по показателю дюрации	Портфель, хеджированный по показателям дюрации и выпуклости Фишера-Вайля	Портфель, хеджированный по *дискретным* показателям дюрации и выпуклости $\overline{D}$ и $\overline{C}$	Все средства инвестированы в ОФЗ-ПД 26003	Все средства инвестированы в ОФЗ-ФК 27011
+5%	-0,2285	-0,0132	+0,0450	-13,3487	-8,5336
+3%	-0,0841	-0,0030	+0,0267	-8,2698	-5,2216
+1%	-0,0096	-0,0001	+0,0078	-2,8475	-1,7753
-1%	-0,0096	+0,0001	-0,0057	+2,9425	+1,8110
-3%	-0,0888	+0,0033	-0,0072	+9,1261	+5,5431
-5%	-0,2581	+0,0156	+0,0108	+15,7311	+9,4270

[2] Для расчета коэффициентов хеджирования использованы продолжительность и выпуклость Фишера-Вайля. Однако для этой же цели можно использовать *дискретные* варианты данных показателей - модифицированную продолжительность и выпуклость (формула (5.9)), рассчитанные как *функции доходности к погашению*. Коэффициенты хеджирования будут иметь значения: h_2=3,7737 и h_3=–3,5832. Данные значения существенно отличаются от коэффициентов, полученных на основании показателей Фишера-Вайля - совпадать они будут только в случае плоской кривой доходности.

Пример 5.2 свидетельствует, что хеджирование на основании квадратичной аппроксимации зависимости цены от доходности (т.е. одновременно по показателям продолжительности и выпуклости) является существенно более эффективным, чем хеджирование только лишь по величине дюрации (колебания стоимости инвестиций в последнем случае являются значительно большими).

Данные последней таблицы в примере 5.2 свидетельствуют о еще одном негативном свойстве хеджирования, основанного *исключительно* на продолжительности: приросты стоимости хеджированного портфеля (пусть относительно небольшие) являются *отрицательными независимо от направления изменения процентных ставок*. Как бы не менялись процентные ставки, хеджированный портфель *теряет* небольшую часть стоимости, т.к. зависимость стоимости от процентных ставок является в данном случае *вогнутой функцией*. Действительно, для инвестора нежелательными являются *потери стоимости*, связанные с колебаниями процентных ставок, тогда как при изменении доходности возможен и выигрыш. При равенстве нулю первой производной цены по доходности (дюрации) выполнение условия:

$$\mathcal{C} \geq 0 \tag{5.13}$$

обеспечивает выпуклость функции цены, т.е. в каком бы направлении не изменились процентные ставки, стоимость инвестиций увеличится. Поэтому именно выполнение (5.13) часто рассматривается как необходимое дополнительное условие хеджирования риска процентной ставки. Подробнее о методах хеджирования *портфеля* долговых инструментов - в следующей главе.