VI. Иммунизация

Иммунизацией принято называть основанную на показателе дюрации *стратегию управления потоками платежей*, целью которой является минимизация риска процентной ставки. Метод иммунизации достаточно прост и хорошо известен. Вследствие простоты (а именно - упрощающих действительность предположений, лежащих в основе метода), использование его на практике может быть недостаточно эффективно. Тем не менее, сфера применения иммунизации очень широка - существенно шире круга задач, связанных с инвестированием в портфель долговых обязательств.

Идея метода и сам термин «иммунизация» введены Ф. Редингтоном (1952) [ ], рассматривавшим задачу управления активами и обязательствами страховой компании. Метод и практические аспекты его применения были развиты в работах Дж. Бирвага, Дж.Кауфмана и А. Тоевса (1979) [ ], (1983) [ ], Х.Фонга и О.Васичека (1980) [ ], и др. Метод условной иммунизации разработан. М. Лейбовицем и А. Вейнбергером (1981) [ ] [ ], (1982) [ ], (1983) [ ]. Известными обобщающими работами по вопросам управления процентным риском на основании показателей дюрации, являются книги Дж. Бирвага (1987) [ ] и Ф. Фабоцци (напр. (1989) [ ]). Оптимизационные задачи управления портфелем, использующие принцип иммунизации, рассмотривались в работах С.Зениоса (см. напр. собрание работ под ред. С. Зениоса и Дж. Данцига (1993) [ ]).

Принцип иммунизации

В предыдущей главе хеджирование рассматривалось как страхование *сегодняшней* стоимости активов от неожиданного изменения процентных ставок. В то же время инвестор может быть гораздо более заинтересован в защите стоимости инвестиций на определенный *будущий момент времени*, который называют *плановым горизонтом*.

Пусть объем средств, инвестированных в портфель инструментов с фиксированным доходом, равен $P_{П}$. Плановый горизонт инвестора равен τ периодам. Предположим, что *кривая доходности является плоской* - это означает, что величины доходности к погашению всех инструментов, как и спот-ставки, равны между собой. Обозначим текущее значение процентных ставок через y. Это означает, что и доходность любого портфеля $y_{П}$ будет равна текущему уровню процентных ставок: $y_{П} = y$. Стоимость портфеля через время τ будет равна

$$V_{П}(\tau) = P_{П}(1+y)^{\tau}.$$

Однако, если уровень процентных ставок изменится *после* того, как портфель сформирован, то изменится и величина $V_{П}$ - *во-первых*, за счет того, что промежуточные платежи будут реинвестированы по изменившейся ставке, *во-вторых*, потому что стоимость активов, находящихся в портфеле на конец планового горизонта будет зависеть от уровня процентных ставок на этот момент. Причем, если процентные ставки вырастут - инвестор получит больший доход от реинвестирования промежуточных выплат, но стоимость активов в будущем снизится. Снижение процентных ставок будет означать обратный эффект - потери доходов от реинвестирования, но выигрыш в стоимости инструментов на конец периода. Идея метода иммунизации состоит в том, чтобы сбалансировать влияние этих двух факторов таким образом, чтобы суммарная стоимость инвестиций на конец планового горизонта не зависела бы от колебаний процентных ставок.

Изменение будущей стоимости портфеля в случае, если процентные ставки сразу же после формирования портфеля параллельно изменились на небольшую величину и в дальнейшем оставались неизменными, можно записать с помощью производной

$$\frac{dV_{П}}{dy} = \frac{d}{dy}\left(P_{П}(1+y)^{\tau}\right).$$

Иммунизация портфеля в условиях принятых предположений означает, что данная производная должна равняться нулю, т.е.

$$\frac{dP_{П}}{dy}\cdot(1+y)^{\tau} + P_{П}\cdot T\cdot(1+y)^{\tau-1} = 0,$$

откуда получим

$$P_{П}(1+y)^{\tau-1}\left[\frac{dP_{П}}{dy}\cdot\frac{(1+y)}{P_{П}} + \tau\right] = 0,$$

или окончательно

$$-\frac{dP_{П}}{dy}\frac{(1+y)}{P_{П}}=\tau\,. \tag{6.1}$$

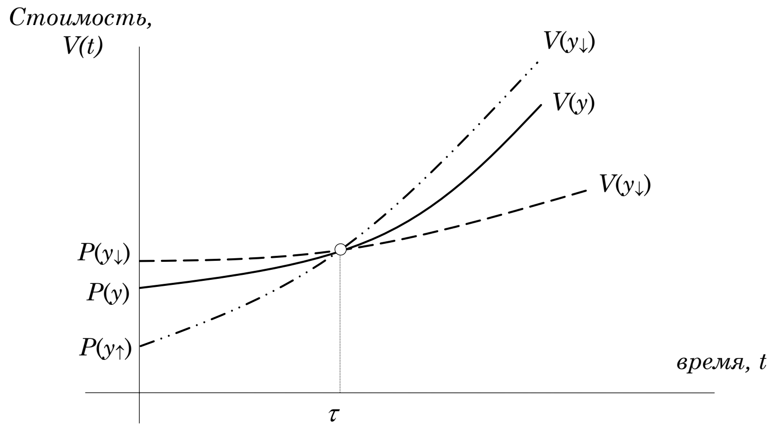

Рис. 6.1 Окно дюрации. Сплошной линией показана динамика стоимости портфеля в случае неизменности процентной ставки. Прерывистые линии - динамика стоимости в случае снижения и роста процентных ставок сразу же после формирования портфеля. Иммунизированный портфель должен иметь одинаковую стоимость к моменту τ (плановый горизонт), независимо от того - в каком направлении изменились процентные ставки.

Левая часть последнего выражения есть не что иное, как продолжительность Маколея ($D_{П}$). Тем самым, принцип иммунизации может быть сформулирован так: *чтобы обезопасить портфель от параллельных сдвигов кривой доходности, нужно сформировать его таким образом, чтобы дюрация портфеля равнялась плановому горизонту* $D_{П}=\tau$.

Если инвестору доступно K инструментов, z_k - доля k-го инструмента в портфеле, D_k - его продолжительность, условие (6.1) можно записать как

$$\sum_{k=1}^{K}D_k z_k=\tau\,, \tag{6.1'}$$

причем должно выполняться бюджетное ограничение

$$\sum_{k=1}^{K}z_k=1\,. \tag{6.2}$$

Если короткие позиции не допускаются ($z_k\geq 0$ для всех k), то среди доступных инструментов должен быть хотя бы один, продолжительность которого больше или равна плановому горизонту: $D_k \geq \tau$, *и* хотя бы один, для которого $D_k \leq \tau$.

Графическую иллюстрацию стратегии иммунизации принято называть *окном дюрации* (Рис. 6.1 - см. Бирваг (1987) [ ]). Действительно, если сразу после формирования портфеля произошло увеличение процентных ставок (тем самым, - доходности портфеля), текущая стоимость портфеля снизится, но *возрастет темп прироста стоимости инвестиций* (доходность). В случае падения доходности сегодняшняя стоимость возрастет, но темп прироста будет ниже. Задача иммунизации - подобрать портфель, для которого влияние этих двух факторов к концу планового горизонта полностью компенсируется.

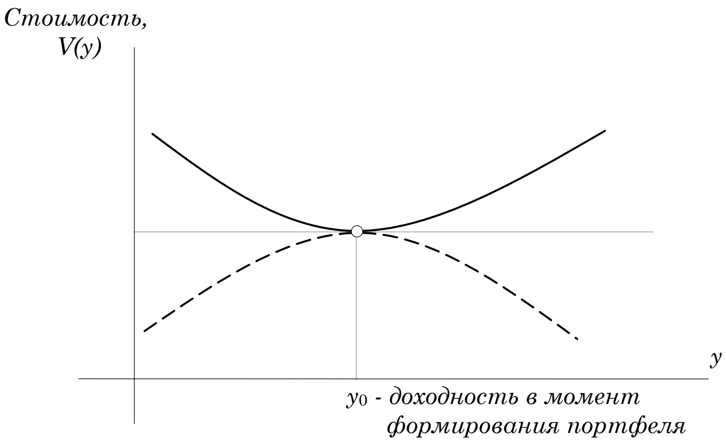

Рис. 6.2 Вогнутость иммунизированного портфеля. На рисунке изображены возможные варианты зависимости стоимости иммунизированного портфеля на момент T от доходности. Иммунизация гарантирует равенство нулю производной dV/dy, т.е. V не меняется при бесконечно малых изменениях y, но колеблется, если изменение процентных ставок существенно. Если в портфеле - только длинные позиции (z_k>0) и денежные потоки по входящим в портфель инструментам положительны, функция $V(y)$ будет выпуклой (d^2V/dy^2>0), и все изменения y - благоприятными (сплошная линия на рисунке). Однако при невыполнении указанных условий, *возможна* ситуация вогнутости функции $V(y)$, когда любое существенное изменение доходности будет означать потери для инвестора (прерывистая линия на рисунке).

Недостатки иммунизации

Оборотной стороной простоты рассмотренного подхода иммунизации явлется ряд недостатков, существенно снижающих его практическую эффективность. *Во-первых*, иммунизация страхует только от очень небольших и параллельных изменений процентных ставок, более того, иммунизация, основанная на дискретных показателях продолжительности, эффективна *лишь в случае плоской кривой доходности*.

Во-вторых, при равенстве нулю производной dV_{Π}/dy, нелинейная функция $V(y)$ может быть как выпуклой, так и вогнутой. Последнее возможно, если существуют короткие позиции. (для некоторых k, $z_k < 0$), или в портфеле помимо активов, присутствуют обязательства - инструменты с отрицательными выплатами. В этом случае при изменении процентной ставки, независимо от направления (снижение или возрастание), портфель будет терять стоимость (см. рис. 6.2). Такой эффект присутствовал в примере 5.2 предыдущей главы. Чтобы его избежать, необходимо накладывать дополнительное условие $d^2V_{\Pi}/dy^2 \geq 0$.

В-третьих, когда количество доступных активов больше двух, система (6.1) - (6.2) имеет *не единственное* решение - поэтому необходимо либо вводить дополнительные ограничения, либо - использовать критерий, оптимизирующий решение по определенному показателю. Наконец, *в-четвертых*, иммунизация эффективна, если изменение процентных ставок произошло *сразу же* после формирования портфеля и в дальнейшем процентные ставки не менялись. Постоянные колебания процентных ставок требуют *динамических корректировок* структуры портфеля после каждого изменения доходности, что обычно связано с дополнительными транзакционными издержками.

Классическая задача согласования активов и обязательств

Задача согласования денежных потоков по активам и обязательствам является типичной в финансовом менеджменте, в особенности для деятельности финансовых институтов. В классической постановке, носящей название *задачи Редингтона* (1952) [ ], она формулируется следующим образом. Существует определенный поток платежей по обязательствам $L_t \geq 0$ в моменты времени $t = 1,2,\ldots,T$ (время дискретное, что не снижает общности постановки задачи). Необходимо подобрать портфель активов, обеспечивающий поток доходов $A_1, A_2,\ldots, A_T$ (для всех t $A_t \geq 0$), таким образом, чтобы в момент формирования портфеля текущая стоимость активов равнялась текущей стоимости обязательств, и, в случае *изменения* процентных ставок *после* того, как портфель сформирован, независимо от направления такого сдвига, *стоимость активов оставалась бы большей или равной стоимости обязательств*. Кривая доходности в рассматриваемой постановке задачи считается плоской, возможны только параллельные ее сдвиги, доходность активов равна доходности обязательств. В этих условиях, если y

- текущий уровень процентной ставки, то стоимость активов и обязательств равна соответственно:

$$P_A = \sum_{t=1}^{T} (1+y)^{-t} A_t \ , \ P_L = \sum_{t=1}^{T} (1+y)^{-t} L_t \ .$$

Обозначив через P_E разницу текущей стоимости активов и обязательств: $P_E = P_A - P_L$, условия поставленнной выше задачи можно записать как:

$$P_E = 0 \, , \ \frac{dP_E}{dy} = 0 \, , \ \frac{d^2 P_E}{dy^2} \geq 0 \, , \tag{6.3}$$

т.е. как сама функция $P_E(y)$, так и ее первая производная, должна равняться нулю при текущем значении процентной ставки и, кроме того, $P_E(y)$ должна быть выпуклой функцией.

Обозначим через a_t долю поступлений в период t в общей текущей стоимости активов: $a_t = (1+y)^{-t} A_t / P_A$. Соответственно, l_t - доля выплат t-го периода в совокупной стоимости обязательств: $l_t = (1+y)^{-t} L_t / P_L$. Очевидно, что и в первом, и во втором случае сумма долей равняется единице:

$$\sum_{t=1}^{T} a_t = 1 \, , \ \sum_{t=1}^{T} l_t = 1 \, .$$

Используя введенные обозначения, дюрация активов и обязательств может быть представлена как:

$$D_A = \sum_{t=1}^{T} a_t t \, , \ D_L = \sum_{t=1}^{T} l_t t \, .$$

Тем самым, производная dP_E / dy может быть записана через показатели дюрации:

$$\frac{dP_E}{dy} = \frac{dP_A}{dy} - \frac{dP_L}{dy} = -(1+y)^{-1} P_A D_A + (1+y)^{-1} P_L D_L \, .$$

Так как доходность y по условию одинакова для активов и обязательств, и $P_A = P_L$, то для того, чтобы данная производная равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы дюрация активов равнялась дюрации обязательств:

$$D_A = D_L \, . \tag{6.4}$$

Данное соотношение называют *первым условием иммунизации* Редингтона. *Второе условие* касается выпуклости (неотрицательности второй производной) функции $P_E(y)$. Нетрудно убедиться, что:

$$\frac{dD_A}{dy} = -(1+y)^{-1} I_A \text{, где } I_A = \sum_{t=1}^{T} a_t t^2 - \left(\sum_{t=1}^{T} a_t t\right)^2 = \sum_{t=1}^{T} a_t (t - D_A)^2 .$$

Если дюрация D_A измеряет *средний срок* потока платежей, то величина I_A является мерой *рассеивания* платежей во времени[1]. Аналогичный показатель может быть рассчитан для потока обязательств:

$$I_L = \sum_{t=1}^{T} l_t (t - D_L)^2 \text{, причем } \frac{dD_L}{dy} = -(1+y)^{-1} I_L .$$

Используя выражения для dD_A / dy и dD_L / dy, вторая производная функции $P_E(y)$ может быть представлена как:

$$\frac{d^2 P_E}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(-(1+y)^{-1} P_A D_A + (1+y)^{-1} P_L D_L\right) =$$
$$= (1+y)^{-2}\left(P_A D_A + P_A D_A^2 + P_A I_A - P_L D_L - P_L D_L^2 - P_L I_L\right).$$

Так как $P_A = P_L$ и, при выполнении первого условия иммунизации, $D_A = D_L$, функция $P_E(y)$ будет выпуклой ($d^2 P_E / dy^2 \geq 0$) если:

$$I_A \geq I_L , \tag{6.5}$$

т.е. *рассеивание потока активов будет большим или равным рассеиванию потока обязательств*. Последнее соотношение называют *вторым условием иммунизации* Редингтона.

Выбор инструментов в задаче иммунизации

Более реалистичной постановкой рассмотренной задачи иммунизации является выбор не непосредственно потока доходов от активов $A_1, A_2, \ldots, A_T$, а *портфеля финансовых инструментов*, обеспечивающего поток доходов, который удовлетворял бы условиям иммунизации (6.4), (6.5). Если для инвестирования доступно K инструментов, C_{kt} - доход на одну единицу k-го инструмента в период t ($k = 1,2,\ldots,K$), то задачей является выбор количества k-х инструментов в портфеле Z_k. Объем доходов от портфеля активов в каждый период t определяется как:

$$A_t = \sum_{k=1}^{K} Z_k C_{kt} .$$

[1] Показатели D и I внешне аналогичны понятиям математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины (если бы, например, a_t были вероятностями, а промежутки времени t - реализациями случайной величины). Поэтому I также называют *дисперсией* потока платежей. Бирваг (1987) [ ] использует термин *инерция*, по аналогии с соответствующим физическим понятием.

Возможна также обратная постановка задачи иммунизации - когда для заданного потока доходов нужно подобрать источники финансирования - портфель обязательств с выплатами $L_1, L_2, \ldots, L_T$, такими, чтобы привлеченных источников было достаточно для финансирования имеющихся активов, и выполнялись условия иммунизации. Аналогично, если доступно M инструментов долгового финансирования, G_{mt} - выплата на одну единицу инструмента m в момент t, Q_m - количество инструментов m, то поток обязаельств определяется как:

$$L_t = \sum_{m=1}^{M} Q_m G_{mt} .$$

Наконец, для финансового института актуальной может быть задача формирования портфеля, когда определенная свобода существует как в выборе активов, так и обязательств.

Иммунизация стоимости собственного капитала

Разница между текущей стоимостью активов и обязательств P_E является стоимостью *собственного капитала*. Более естественно рассматривать ситуацию, когда P_E положительна, а задача иммунизации - застраховать стоимость собственного капитала от непредвиденных изменений процентных ставок. Условия иммунизации в этом случае несколько изменятся. Действительно, первое условие должно обеспечивать $dP_E / dy = 0$, т.е.:

$$(1+y)^{-1}\left(-P_A D_A + P_L D_L\right) = 0 .$$

Доходность активов и обязательств по прежнему считаем одинаковой и равной y, однако их стоимость теперь различна ($P_A \neq P_L$). Первое условие иммунизации будет выглядеть как:

$$D_A = (P_L / P_A) D_L , \tag{6.6}$$

второе, соответственно:

$$I_A + D_A^2 \geq (P_L / P_A)(I_L + D_L^2) . \tag{6.7}$$

Если равенство (6.6) не выполняется, собственный капитал будет подвержен влиянию колебаний процентной ставки. Разницу между левой и правой частью условия (6.6) называют *разрывом продолжительности*. В случае *положительного* разрыва, активы более чувствительны к процентной ставке по сравнению с обязательствами. Это означает, что в случае роста процентной ставки, стоимость собственного капитала будет снижаться, и наоборот - снижение процентных ставок будет означать рост стоимости собственного капитала. Если разрыв продолжительности отрицателен, рост процентных ставок будет благоприятен, тогда как при снижении величины y часть стоимости собственного капитала будет потеряна.

Иммунизация при различии доходности активов и обязательств

Условия иммунизации несколько видоизменятся, если доходность активов и обязательств различна. Пусть $y_L = y$ - доходность обязательств, $y_A = y + s$ - доходность активов, где $s > 0$ - размер спреда, который пока будем считать постоянным. Условия иммунизации запишутся несколько более громоздко:

$$D_A = \left[P_L(1+y_A) / P_A(1+y_L)\right] D_L , \tag{6.8}$$

$$D_A + D_A^2 + I_A = \left(P_L(1+y_A)^2 / P_A(1+y_L)^2\right) \cdot \left(D_L + D_L^2 + I_L\right) \tag{6.9}$$

Иммунизация прибыли на собственный капитал

В расмотренных моделях иммунизации задачей было застраховать *текущую* стоимость собственного капитала от непредвиденных колебаний процентной ставки. Однако задачей может быть хеджирование стоимости собственного капитала на определеннй *будущий* момент (плановый горизонт), тем самым целью является страхование размера *прибыли* на собственный капитал, получаемой в течение определенного интервала времени. Пусть τ - плановый горизонт, тогда стоимость собственного капитала через время τ равна $P_E(\tau) = P_A(1+y_A)^\tau - P_L(1+y_L)^\tau$. Размер спреда между доходностью активов и обязательств $(y_A - y_L)$ будем считать фиксированным. Первое условие иммунизации, обеспечивающее отсутствие чувствительности $P_E(\tau)$ к небольшим изменениям процентной ставки ($dP_E(\tau)/dy = 0$) может быть записано как:

$$D_A = \frac{P_L}{P_A}\left(\frac{1+y_L}{1+y_A}\right)^{\tau-1}\left(D_L - \tau\right) + \tau . \tag{6.10}$$

Если доходность активов и обязательств совпадает ($y_A = y_L$) условие (6.10) упростится:

$$D_A = (P_L / P_A)(D_L - \tau) + \tau . \tag{6.10'}$$

Последнее условие можно представить как:

$$\pi_A D_A + \pi_L D_L = \tau , \tag{6.10''}$$

где $\pi_A = P_A /(P_A - P_L)$ - отношение стоимости активов к собственному капиталу, т.е. *доля стоимости активов в совокупном портфеле*, состоящем из активов и обязательств, $\pi_L = -P_L/(P_A - P_L)$ - доля стоимости обязательств. Правая часть выражения (6.10") является, таким образом, дюрацией *совокупного портфеля*, а само условие (6.10") - вариантом основного принципа иммунизации, сформулированного в 1-м параграфе настоящей главы: *дюрация иммунизированного портфеля должна равняться длительности планового горизонта*.

Заметим, что при $\tau = 0$ условие (6.10') превращается в (6.6), равно как из (6.10) получим (6.8). Кроме того, при равенстве текущей стоимости активов и обязательств ($P_A = P_L$), независимо от длительности планового горизонта, условием иммунизации будет равенство показателей дюрации: $D_A = D_L$.

Иммунизация в случае неплоской кривой доходности

Естественно, что предположение о плоской кривой доходности является слишком упрощенным. Если ставки доходности для различных сроков не одинаковы (что значительно более соответствует реальности), денежные потоки по активам и обязательствам должны дисконтироваться по рыночным ставким, зависящим от длительности промежутка времени до соответствующего платежа. Переход к ставкам с непрерывным сложным процентом позволяет отказаться от предположения о плоской кривой доходности, сделав иммунизацию более универсальной и существенно упростив формулы. Пусть $x(t)$ - кривая рыночных спот-ставок, $p(t) = e^{-x(t)t}$ - соответствующая ей кривая коэффициентов дисконтирования (цен простых дисконтных облигаций). Текущая стоимость потока доходов $A_1, A_2, \ldots, A_T$ должна определяться как:

$$P_A = \sum_{t=1}^{T} p_A(t) A_t .$$

Аналогично, для потока выплат $L_1, L_2, \ldots, L_T$, текущая стоимость обязательств равняется:

$$P_L = \sum_{t=1}^{T} p_L(t) L_t .$$

$p_A(t)$ и $p_L(t)$ - это коэффициенты дисконтирования для активов и обязательств соответственно. В данном случае равенство ставок доходности для активов и обязательств не является критичным и возможно рассматривать ситуацию, когда кривые доходности и, соответственно, ставки дисконтирования активов и обязательств различны, т.е. $p_A(t) \neq p_L(t)$. Главным предположением остается зависимость всех ставок от *единственного фактора* - краткосрочной ставки x, т.е. $x_A(t) = x + s_A(t)$, $x_L(t) = x + s_L(t)$, причем величина спредов $s_A(t)$ и $s_L(t)$ является *постоянной*, что допускает только паралельные сдвиги структуры процентных ставок.

При небольшом параллельном сдвиге процентных ставок, стоимость собственного капитала изменится на величину:

$$\frac{dP_E}{dx} = \frac{dP_A}{dx} - \frac{dP_L}{dx} = -P_A \mathcal{D}_A + P_L \mathcal{D}_L ,$$

где $\mathcal{D}_A$ и $\mathcal{D}_L$ - дюрация Фишера-Вайля для потока доходов и выплат соответственно. Таким образом, первое условие иммунизации в условиях неплоской кривой доходности ничем не отличается от (6.6), за исключением того, что в качестве дюрации использованы показатели Фишера-Вайля:

$$\mathcal{D}_A = (P_L / P_A)\mathcal{D}_L . \tag{6.11}$$

Подчеркнем еже раз, что данное условие иммунизации остается в силе *даже* в случае различий между ставками доходности активов и обязательств: портфель будет застрахован от процентного риска, если сдвиги кривых доходности будут относительно небольшими и главное - параллельными. Как и в дискретном случае, невыполнение условия (6.11) означает подверженность колебаниям процентных ставок, причем если $\mathcal{D}_A > (P_L / P_A)\mathcal{D}_L$ благоприятным (т.е. увеличивающим стоимость собственного капитала) является *снижение* процентных ставок, и наоборот - в случае $\mathcal{D}_A < (P_L / P_A)\mathcal{D}_L$.

Второе условие иммунизации требующее выпуклости функции $P_E(x)$, т.е. неотрицательности ее второй производной ($d^2 P_E / dx^2 \geq 0$) можно записать:

$$\frac{dP_E}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-P_A \mathcal{D}_A + P_L \mathcal{D}_L\right) = P_A \mathcal{C}_A - P_L \mathcal{C}_L \geq 0 ,$$

или:

$$\mathcal{C}_A \geq (P_L / P_A)\mathcal{C}_L , \tag{6.12}$$

где $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_L$ - *выпуклость* активов и обязательств соответственно:

$$\mathcal{C}_A = \sum_{t=1}^{T} t^2 a_t , \text{ где } a_t = \frac{p_A(t) A_t}{P_A} ,$$

$$\mathcal{C}_L = \sum_{t=1}^{T} t^2 l_t , \text{ где } l_t = \frac{p_L(t) L_t}{P_L} .$$

Рассмотрим случай, когда необходимо застраховать стоимость собственного капитала на определенный *будущий момент* времени (плановый горизонт) τ. Стоимость денежного потока A_t, возникающего во время t, на момент τ может быть представлена как:

$$\widetilde{p}_A(t-\tau)A_t \text{, где } \widetilde{p}_A(t-\tau) = \begin{cases} p_A(t-\tau) = e^{-x_A(t-\tau)\cdot(t-\tau)}, & t \ge \tau \\ 1/p_A(\tau-t) = e^{x_A(\tau-t)\cdot(\tau-t)}, & t < \tau \end{cases}$$

Стоимость собственного капитала на момент τ равняется $P_E(\tau) = P_A(\tau) - P_L(\tau)$, где:

$$P_A(\tau) = \sum_{t=1}^{T} \widetilde{p}_A(t-\tau)A_t \ , \ P_L(\tau) = \sum_{t=1}^{T} \widetilde{p}_L(t-\tau)L_t$$

Первое и второе условия иммунизации стоимости собственного капитала на момент τ могут быть представлены как:

$$\mathcal{D}_A(\tau) = (P_L(\tau)/P_A(\tau))\mathcal{D}_L(\tau) . \tag{6.11'}$$

$$\mathcal{C}_A(\tau) \ge (P_L(\tau)/P_A(\tau))\mathcal{C}_L(\tau) , \tag{6.12'}$$

где $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_L$, $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_L$ - дюрация и выпуклость активов и обязательств, *рассчитанная на момент* τ:

$$\mathcal{D}_A(\tau) = \sum_{t=1}^{T} (t-\tau)\widetilde{a}_t(\tau) \text{, где } \widetilde{a}_t(\tau) = \widetilde{p}_A(t-\tau)A_t / P_A(\tau) , \tag{6.13}$$

$$\mathcal{C}_A(\tau) = \sum_{t=1}^{T} (t-\tau)^2 \widetilde{a}_t(\tau) . \tag{6.14}$$

Соответствующие показатели для потока обязательств рассчитываются аналогично. Как видим, при $\tau = 0$ показатели (6.13), (6.14) превращаются в дюрацию и выпуклость Фишера-Вайля, а выражения (6.11'), (6.12') - в обычные условия иммунизации *текущей* стоимости собственного капитала (6.11), (6.12).

Оптимальность иммунизированного портфеля

Если на рынке доступно достаточное количество различных инструментов, существует *множество* портфелей, которые удовлетворяют условиям иммунизации. Естественно, что на практике, помимо условий иммунизации, необходимо учитывать много других ограничений на структуру активов и обязательств, что сужает круг возможных вариантов решения. Тем не менее, если возможное решение не единственное, возникает проблема *выбора* варианта, который был бы наилучшим (*оптимальным*) с точки зрения какого-либо критерия. В качестве критериев чаще всего упоминают два: *максимизация доходности* портфеля (в т.ч. реализованной доходности к плановому горизонту, спреда между доходностью активов и обязательств и т.п.) и *максимизация стоимости собственного капитала* инвестора (или финансового института) - на сегодняшний день или к определенному будущему моменту.

Простейшая *оптимизационная* модель иммунизации портфеля долговых обязательств может быть представлена как расширение задачи из 1-го параграфа настоящей главы. Пусть доступно K долговых инструментов, y_k, D_k, $\overline{C}_k$ - соответственно доходность к погашению, дюрация Маколея и выпуклость k-го инструмента ($k = 1,2,\ldots,K$), z_k - искомые *доли* каждого из инструментов в общем объеме инвестиций. Доходность портфеля может быть приближенно оценена как взвешенная по дюрации и по долям инвестиций доходность входящих в портфель инструментов, т.е.:

$$y_{\Pi} \cong \sum_{k=1}^{K} y_k D_k z_k \Big/ \sum_{k=1}^{K} D_k z_k \ , \tag{6.15}$$

(Отметим, что знаменатель в последнем выражении есть дюрация портфеля). Для максимизации доходности портфеля достаточно обеспечить:

$$\max_{z_1, z_2, \ldots, z_K} \sum_{k=1}^{K} y_k D_k z_k \ , \tag{6.16}$$

одновременно z_k должны быть такими, чтобы выполнялось условие иммунизации (6.1’):

$$\sum_{k=1}^{K} D_k z_k = \tau \ , \tag{6.1’}$$

бюджетное ограничение (6.2):

$$\sum_{k=1}^{K} z_k = 1 \ , \tag{6.2}$$

и ограничение по выпуклости:

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{C}_k z_k \geq 0 \ . \tag{6.17}$$

Последнее ограничение выполняется автоматически, если невозможны короткие продажи (т.е. $z_k \geq 0$) и все денежные потоки по инструментам, входящим в портфель, положительны.

Достоинством приведенной выше модели является простота постановки и реализации, однако она не вполне удовлетворительна с точки зрения достижения поставленных целей. Во-первых, если доходность к погашению входящих в портфель инструментов различна, это означает что кривая доходности не плоская, тем самым условия иммунизации (6.1’), (6.2), основанные на дискретных показателях дюрации и выпуклости, не вполне точны. С другой стороны, при плоской структуре процентных ставок доходность всех инструментов одинакова, и критерий (6.16) не имеет смысла. Во-вторых, условием (6.16) максимизируется средняя доходность к погашению инструментов, входящих в портфель, а *не* реализованная доходность портфеля к определенному плановому горизонту (инвестора интересует именно последняя), в то время как эти величины могут существенно различаться.

Для финансового института более естествено в качестве целевого показателя рассматривать текущую *стоимость собственного капитала* либо его стоимость на определенный момент в будущем (т.е. сегодняшнюю стоимость плюс прибыль на собственный капитал, полученную за данный период). Задачей в данном случае является выбор портфеля активов *и* обязательств[2], который отвечал бы условиям иммунизации (например, (6.13) и (6.14)) и максимизировал бы величину $P_E(\tau)$.

Пример 6.2 Краткосрочное финансирование предприятия

В настоящем примере необходимо принять решение о краткосрочном финансировании предприятия, при условии, что прогнозируемый денежный поток определен. Пусть согласно финансовому плану предприятия на следующий год прогнозируются следующие денежные потоки:

Квартал	Свободный денежный поток после налогобложения, млн. грн.
1	-20
2	+10
3	+10
4	+10

Как видим, в первом квартале денежный поток отрицателен - это означает, что требуется внешнее финансирование (считаем, что все возможные внутренние источники использованы, и изменение финансового плана для выравнивания денежных потоков невозможно). В качестве внешнего источника доступен банковский кредит, причем процентная ставка по трехмесячному кредиту равна 30% годовых (номинальная ставка), а если кредит берется на срок от 6 месяцев до 1 года - 40% годовых. Трехмесячный кредит более дешев, но, как видно из финансового плана, денежного потока предприятия во втором квартале будет недостаточно, чтобы вернуть кредит размером 20 млн. грн. вместе с процентами - потребуется снова привлекать заемные средства, и нет гарантии что к этому времени процентные ставки не вырастут. Т.е. присутствует процентный риск, и задача заключается в выборе

[2] Как уже отмечалось, *полной* свободы в выборе портфеля активов и обязательств быть не может. Либо определена структура обязательств, либо - структура активов. Или, при наличии опеределенной свободы в выборе *и активов, и обязательств*, существуют ограничения, связанные с положением на рынке, нормативным регулированием, целями финансового института, и другими факторами. Тогда эти ограничения должны входить в модель как дополнительные условия, накладываемые на искомое решение.

такого решения по краткосрочному финансированию, которое страховало бы предприятие от риска и одновременно обеспечивало бы максимально возможный посленалоговый денежный поток на собственный капитал. Очевидно, что возможными вариантами решения есть взять в первом квартале кредит на срок три, шесть или девять месяцев, либо использовать определенную их *комбинацию*. Сегодняшним моментом считаем первый квартал и, используя введенные обоначения, текущая стоимость обязательств равна $P_L = 20$ млн. грн. Процентные ставки по кредитам (30% и 40%) указаны в доналоговом исчислении, это означает, что с учетом налоговой защиты по процентным платежам, если ставка налога на прибыль равна 30%, они составят соответственно 30%×(1 - 0,3)=21% и 40%×(1 - 0,3)=28% годовых. Если проценты выплачиваются *поквартально*, это означает, что величина процентных издержек в расчете на одну гривню кредита в посленалоговом исчислении равна 0,0525 грн. при ставке кредита 30%, и 0,07 грн. - при ставке 40%. Тем самым, доступные варианты кредитования могут быть представлены в виде:

Квартал	Денежные потоки в расчете на 1 грн. кредита (в посленалоговом исчислении)			Коэффициент дисконтирования $p_L(t)$	Ставка спот $x_L(t)$, в квартальном исчислении
	Кредит на 1 квартал	Кредит на 2 квартала	Кредит на 3 квартала		
1	+1,00	+1,00	+1,00	1,0000	
2	-1,0525	-0,07	-0,07	0,9501	5,12%
3	-	-1,07	-0,07	0.8724	6,82%
4	-	-	-1,07	0.8153	6,80%

Единицей измерения будем считать один квартал. Первый квартал считаем *сегодняшним* моментом, поэтому $t =$(Номер квартала - 1), плановый горизонт $\tau = 3$ (время от текущего момента до конца года). Коэффициенты дисконтирования $p_L(t)$ рассчитаны цепным методом (см. Пример 3.), ставки спот - по формуле $x_L(t) = -(1/t)\ln p_L(t)$.

В качестве доходности активов (x_A) необходимо взять ставку, по которой могут быть реинвестированы положительные денежные потоки. Пусть это ставка по депозиту, равная, независимо от срока, 5% в квартал. Тогда для потока доходов получим

t	A_t	$x_A(t)$	$p_A(t)$	$t-\tau$	$\widetilde{p}_A(t-\tau)$	$\widetilde{a}_t(\tau)$
1	10	5%	0,9512	-2	1,1052	0,350
2	10	5%	0,9048	-1	1,0513	0,333
3	10	5%	0,8607	0	1,0000	0,317

Дюрация и выпуклость потока доходов, рассчитанные на момент τ , равняются, в соответствии с формулами (6.13), (6.14), соответственно $\mathcal{D}_A(\tau) = -1{,}0333$, $\mathcal{C}_A = 1{,}7336$.

В оптимизационной задаче необходимо найти объем кредита каждого вида (на срок один, два и три квартала) таким образом, чтобы максимизировать стоимость собственного капитала на конец планового горизонта $P_E(\tau)$. Ограничениями являются (6.11') и (6.12'), бюджетное ограничение (сумма всех кредитов должна равняться 20 млн. грн.) и ограничение на неотрицательность объемов кредитов. Полученная задача является достаточно простой, решить ее можно без помощи специализированного программного обеспечения - воспользовавшись например, функцией Solver («Поиск решения») электронной таблицы. Оптимальное решение задачи приведено в таблице:

Инструмент	Объем, млн. грн.
Кредит сроком 1 квартал	6,112
Кредит сроком 2 квартала	13,888
Кредит сроком 3 квартала	0

В том, что данное решение действительно страхует от риска колебаний процентной ставки, можно убедиться, исследовав влияние изменение уровня процентных ставок на стоимость собственного капитала на момент τ , и сравнив с другими вариантами выбора источников финансирования (например, использование только одного вида кредита). Результат такого расчета приведен на Рис. 6.3.

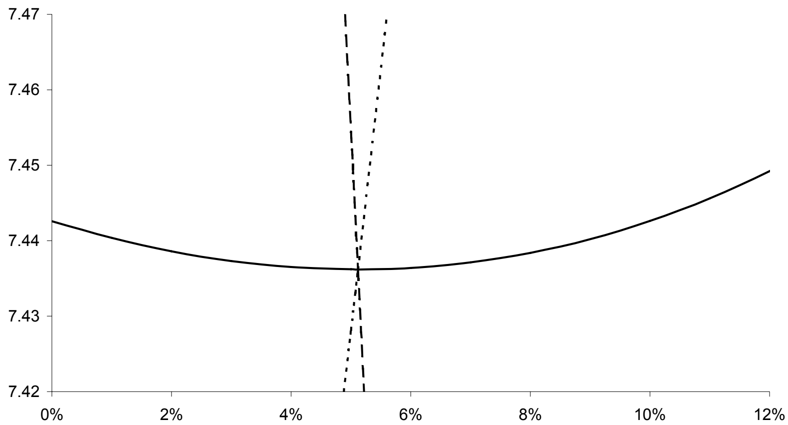

Рис. 6.3 Иммунизация портфеля краткосрочных кредитов (см. Пример 6.2). По вертикали на рисунке - стоимость собственного капитала на момент τ, по горизонтали - уровень процентных ставок. Сплошная линия характеризует иммунизированный портфель, прерывистые линии - выбор только одного инструмента (в данном случае - кредиты сроком 1 и 2 квартала).

Непараллельные сдвиги кривой доходности: кусочная иммунизация

Основным недостатком рассмотренных вариантов стратегий иммунизации остается то, что они защищают стоимость портфеля лишь от *паралельных* сдвигов кривой доходности (пропорционального изменения общего уровня процентных ставок в одном направлении). Тем не менее, метод имунизации может быть обобщен таким образом, чтобы обеспечивать защиту и от других возможных изменений процентных ставок. Содержание подобных обобщенных методов определяется принимаемой *гипотезой* относительно поведения процентных ставок (*моделью процентных ставок*). Ниже рассматривается вариант стратегии иммунизации для простейшей из возможных моделей изменения процентных ставок, допускающей непараллельные сдвиги. Более реалистичные модели динамики процентных ставок рассматриваются в Главе 7. Обобщение различных стратегий хеджирования портфеля содержится в Главе 12.

Предположим, что кривая доходности $x(t)$ может быть поделена на два участка[3]: от сегодняшнего дня до некоторого момента Q, и от момента Q+1 до T, при этом каждая спот-ставка может быть представлена:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + s_0(t), & t = 1,\dots,Q \\ x_\infty + s_\infty(t), & t = Q+1,\dots,T \end{cases}$$

где x_0 и x_∞ - сответственно краткосрочная и долгосрочная ставки, $s_0(t)$ и $s_\infty(t)$ - спреды, которые для каждого срока *t постоянны*. По сути, в отличие от предыдущих моделей, мы предполагаем наличие не одного (краткосрочная ставка), а *двух* факторов риска, причем один участок кривой доходности зависит только от краткосрочной ставки, другой - только от долгосрочной. Цена любого инструмента с фиксированным доходом является в таком случае функцией двух переменных: $P_k(x_0, x_\infty)$. Дифференциал данной функ-

[3] Здесь, как и ранее в этой главе, мы считаем время дискретным, т.е. промежутки времени состоят из целого числа элементарных периодов, что нисколько не снижает общность рассматриваемых методов.

ции, измеряющий ее изменение при бесконечно малых приращениях x_0 и x_∞ может быть записан как:

$$dP_k = \frac{\partial P_k}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial P_k}{\partial x_\infty} dx_\infty . \tag{6.18}$$

Обозначим $\mathfrak{D}_{0,k} = (1/P_k)\partial P_k / \partial x_0$, $\mathfrak{D}_{\infty,k} = (1/P_k)\partial P_k / \partial x_\infty$ (заметим, что сумма данных величин равна дюрации Фишера-Вайля: $\mathfrak{D}_{0,k} + \mathfrak{D}_{\infty,k} = \mathfrak{D}_k$).

Рассмотрим обычную задачу иммунизации, когда есть активы суммарной стоимостью P_A и обязательства стоимостью P_L, и необходимо застраховать текущую стоимость собственного капитала $P_E = P_A - P_L$ от непредвиденных колебаний процентных ставок. Выражение (6.18) справедливо и для стоимости портфеля, т.е. мы можем записать:

$$\begin{aligned} dP_E &= dP_A - dP_L = \mathfrak{D}_{0,A} P_A dx_0 + \mathfrak{D}_{\infty,A} P_A dx_\infty - \mathfrak{D}_{0,L} P_L dx_0 - \mathfrak{D}_{\infty,L} P_L dx_\infty = \\ &= (\mathfrak{D}_{0,A} P_A - \mathfrak{D}_{0,L} P_L) dx_0 + (\mathfrak{D}_{\infty,A} P_A - \mathfrak{D}_{\infty,L} P_L) dx_\infty , \end{aligned}$$

где:

$$\mathfrak{D}_{0,A} = \sum_{t=1}^{Q} t p_A(t) A_t \Big/ P_A , \quad \mathfrak{D}_{0,L} = \sum_{t=1}^{Q} t p_L(t) L_t \Big/ P_L ,$$

$$\mathfrak{D}_{\infty,A} = \sum_{t=Q+1}^{T} t p_A(t) A_t \Big/ P_A , \quad \mathfrak{D}_{\infty,L} = \sum_{t=Q+1}^{T} t p_L(t) L_t \Big/ P_L ,$$

A_t, L_t - как и ранее, денежные потоки по активам и обязательствам в момент t, соответственно.

Стоимость собственного капитала будет независимой от небольших изменений x_0 и x_∞ если будет выполняться:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{0,A} &= (P_L / P_A) \mathfrak{D}_{0,L} \\ \mathfrak{D}_{\infty,A} &= (P_L / P_A) \mathfrak{D}_{\infty,L} \end{aligned} . \tag{6.19}$$

Так как $\mathfrak{D}_{0,A} + \mathfrak{D}_{\infty,A} = \mathfrak{D}_A$ и $\mathfrak{D}_{0,L} + \mathfrak{D}_{\infty,L} = \mathfrak{D}_L$, выполнение (6.19) означает, что справедливо и (6.11), т.е. данная стратегия обеспечивает, как и обычная иммунизация, страхование от параллельных изменений уровня процентных ставок. Преимуществом данного подхода является хеджирование портфеля для случая, когда краткосрочные и долгосрочные ставки меняются непропорционально, или в различных направлениях.

Обобщения условий (6.19) на случай, когда хеджируется стоимость собственного капитала не на *сегодняшний* момент, а к плановому горизонту τ, аналогичны рассмотренным в п. 8 (см. условие (6.11')).

Пример 6.3 Хеджирование непараллельных сдвигов процентных ставок

Продолжим рассмотрение задачи из Примера 6.2. Пусть тепеть требуется сформировать портфель кредитов, обеспечивающий страхование даже в случае, когда процентные ставки с различным сроком меняются в разных направлениях. Предположим, к примеру, что ставка по трехмесячному кредиту и ставки по более длинным кредитам независимы и могут меняться в различных направлениях (например, трехмесячные ставки растут, а шести- и девятимесячные одновременно снижаются или остаются неизменными, или наоборот), т.е., используя введенные обозначения, примем, что $Q=1$ (напомним, что в качестве единицы времени выбран один квартал). Как и ранее, требуется застраховать стоимость собственного капитала на конец планового горизонта $\tau=3$ (т.е. на конец года). Ограничениями задачи будут условия иммунизации:

$$\mathcal{D}_{0,A}(\tau)=(P_L/P_A)\mathcal{D}_{0,L}(\tau),$$

$$\mathcal{D}_{\infty,A}(\tau)=(P_L/P_A)\mathcal{D}_{\infty,L}(\tau),$$

бюджетное ограничение на суммарный объем кредитов и ограничения на неотрицательность размеров кредитов[4]. Критерий, как и ранее, - максимум стоимости собственного капитала на конец года. Оптимальным решением данной задачи будет:

Инструмент	Объем, млн. грн.
Кредит сроком 1 квартал	8,389
Кредит сроком 2 квартала	9,175
Кредит сроком 3 квартала	2,436

Убедиться в том, что данное решение, в отличие от решения из примера 6.2, эффективно даже в случае, когда ставки колеблются непараллельно, можно исследовав влияние разнонаправленных изменений процентных ставок на стоимость собственного капитала. На Рис. 6.4. приведены результаты таких расчетов. Важно отметить, что лучшее хеджирование не является «бесплатным». Если в Примере 6.2, применяя обычную стратегию иммунизации, стоимость собственного капитала при неизменных процентных ставках равнялась 7,436 млн. грн., то для кусочной иммунизации в настоящем Примере - 7,394 млн. грн. (на Рис. 6.4 - значение при изменении ставки на 0%).

[4] В отличие от Примера 6.2, мы, для простоты, не включали ограничение на выпуклость.

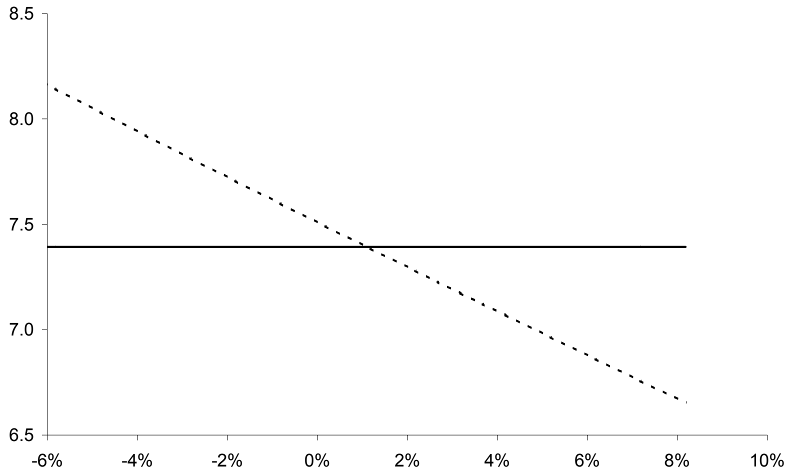

Рис. 6.4 Сравнение эффективности обычной и кусочной стратегий иммунизации (по данным Примеров 6.2 и 6.3). На рисунке, по горизонтальной оси указано *изменение краткосрочной ставки*, при этом *долгосрочные* ставки изменялись пропорционально, но *в противоположном направлении*. *Сплошной* линией показано изменение стоимости капитала при выборе портфеля в соответствии с кусочной стратегией иммунизации, *прерывистая* линия сответствует обычной стратегии иммунизации.

Условная иммунизация

Динамическая иммунизация