VII. Модели

Модели процентных ставок - один из наиболее интенсивно развивающихся разделов современных финансов. В первую очередь это связано с бурным ростом в последние два десятилетия рынков процентных инструментов[1], в первую очередь - рынков всевозможных разновидностей *производных*, что порождает потребность в разработке методов их оценки и использования в стратегиях хеджирования.

Естественным и объяснимым является факт, что финансовые рынки стран Восточной Европы существенно менее развиты и ликвидны по сравнению, с Соединенными Штатами или Западной Европой. Однако это не означает, что использование методов современных финансов, в том числе - связанных с управлением процентным риском, в практике работы финансовых институтов не имеет смысла. Во-первых, потому что, несмотря на неразвитость рынка, *риск процентной ставки существует*, а значит его необходимо контролировать и им необходимо управлять. Во-вторых, потому что существующие тенденции развития рынков, процесс глобализации мировой финансовой системы, приводит к тому, что финансовые инструменты, еще вчера казавшиеся экзотикой, становятся для участников рынка насущно необходимыми. Во-третьих, потому что большое число уже существующих на развивающихся рынках инструментов имеют свойства производных, - денежные потоки по ним зависят от будущих значений процентных ставок. А это означает, что без использования той или иной *модели*, оценить и хеджировать их невозможно.

В то же время следует учитывать, что развивающиеся рынки обладают рядом особенностей, к которым могут относиться относительно высокие уровни инфляции, контроль процентных ставок со стороны центральных банков или правительств, свойства существующей рыночной инфраструк-

[1] Это наблюдение относится, конечно, к финансовыи рынкам развитых стран.

туры, и т.п. Эти особенности могут сделать *неприменимыми* многие популярные модели, вполне работоспособные и эффективные в условиях развитых рынков.

В настоящей главе не преследуется цель дать сколько-нибудь полный обзор существующих моделей процентных ставок - мы рассмотрим лишь *некоторые* принципы и подходы, а также отдельные примеры моделей, которые могут быть использованы (и действительно активно используются) для решения практических задач.

Моделирование процентных ставок - область, требующая достаточно сложного математического аппарата. Акцентируя внимание исключительно на практических аспектах применения рассматриваемых моделей, и стремясь *предельно* упростить изложение, мы, в ущерб математической строгости, ограничимся скорее *интуитивным* пониманием концепций современной финансовой экономики.

Зачем нужна модель

Источником процентного риска является неопределенность, невозможность точного прогнозирования будущих процентных ставок[2]. Однако, не зная - какими в точности будут процентные ставки через месяц или через год, мы знаем, что колебания процентных ставок подвержены определенным закономерностям. Эти знания включают существующие особенности организации и функционирования рынка, а также данные о прошлом (историческом) его развитии. Как минимум, мы знаем, что различные рыночные процентные ставки (и, тем самым, - цены существующих инструментов) более или менее тесно взаимосвязаны между собой. Наличие взаимосвязи между случайными величинами означает, что они находятся под воздействием общих *факторов*. Выбор факторов является, как правило, первым и одним из наиболее важных шагов в построении модели временной структуры. Он может быть сделан достаточно произвольно, когда преследуется цель простоты и прозрачности модели, может основываться на эконометрическом анализе рыночных данных или на некоторой экономической модели равновесия. Далее необходимо определить - в соответствии с какими закономерностями изменяются выбранные факторы (другими словами - какими *случайными процессами* описывается их динамика) и как они связаны с реальными рыночными ценами (процентными ставками). При ответе на последний вопрос как правило предполагают, что существующие рыночные цены не допускают возможности арбитража.

[2] Данное утверждение ни в коем случае не означает, что *прогнозирование* будущих процентных ставок является пустым и ненужным занятием. Речь идет лишь о том, что никакой метод не способен устойчиво давать точные прогнозы - если бы это было возможно, никакого риска не существовало бы.

Случайные процессы, описывающие динамику факторов, всегда зависят от определенного набора *параметров*, поэтому необходимо *откалибровать* модель - найти такие значения параметров, которые наболее точно соответствовали бы наблюдаемым рыночным ценам. На этапе статистического анализа модели важно убедиться, что модель является в достаточной степени *адекватной*, т.е. удовлетворительно описывает соотношения между реальными рыночными показателями и их динамику[3]. Важным (но не всегда обязательным) свойством является *устойчивость* модели - когда она продолжает удовлетворительно описывать реальность даже при относительно существенном изменении рыночных условий.

Наличие модели (в том числе - статистических оценок ее параметров) позволяет решать ряд важнейших задач.

Во-первых, модель дает возможность *оценивать* финансовые инструменты, денежные потоки по которым зависят от выбранных случайных факторов. Оценка в данном случае означает определение такого значения цены, которое исключает арбитраж. Имея информацию о ликвидных инструментах, на основании модели можно оценивать инструменты, которые менее ликвидны или вообще не обращаются на рынке.

Во-вторых, модель необходима для разрабатотки *стратегий хеджирования рисков*, - выбора портфелей финансовых инструментов, стоимость которых не подвержена (точнее - в меньшей степени подвержена) влиянию непредвиденных колебаний случайных факторов. Если некоторая стратегия хеджирования разработана без явного применения модели - это просто означает, что она *неявно* основана на некоторой (возможно, не вполне адекватной) модели.

В-третьих, модель может использоваться как инструмент *контроля риска* - например, для прогнозирования последствий рыночных колебаний для финансового института в целом или для отдельных позиций.

Выбор той или иной модели в любом случае должен соответствовать решаемой задаче. Часто простая модель, не вполне удовлетворительная с точки зрения адекватности, может быть вполне пригодна для решения определенного класса практических задач.

Модели равновесия и арбитражные модели

Способ построения модели структуры процентных ставок во времени может быть различным. В *моделях равновесия* отправной точкой являются предпочтения экономических агентов, и принимаемые на основе этих предпочтений решения. Целью моделирования является определение *абсолют-*

[3] Что, вообще говоря, не всегда возможно. Ряд известных моделей процентных ставок, например, не в состоянии отразить существующие рыночные цены. Требования одновременно описать и текущее состояние, и динамику, могут оказаться взаимоисключающими, и т п.

ных цен в состоянии равновесия - когда все агенты выбрали оптимальные для себя решения. Результат зависит от выбранных предположений, которые могут оказаться слишком упрощающими действительность. Наиболее известной моделью равновесия в области моделирования динамики процентных ставок является модель Кокса-Ингерсолла-Росса (1985) [ ]. Однако ряд других моделей, таких как модель Мертона или модель Васичека, которые не базируются *явно* на условиях равновесия экономической ситемы, также могут быть отнесены к этому классу, поскольку в них постулируются закономерности, в соответствии с которыми ведут себя случайные факторы. В сответствии с Даффи и Каном (1996) [ ], любое явное предположение о закономерностях динамики приоцентных ставок,означает, что в его основе явно или неявно лежит некая модель равновесия.

Арбитражные модели (примерами являются модели Хо-Ли, Халла-Уайта, и множество других) в существенно меньшей степени полагаются на предположения о предпочтениях инвесторов: как правило, достаточно считать, что экономические агенты предпочитают больший доход меньшему. Существующие рыночные цены торгуемых на рынке активов воспринимаются как данность, а цены других (например, производных) инструментов определяются *по отношению* к известным рыночным ценам так, чтобы возможность получения арбитражной прибыли отсутствовала.

И в моделях равновесия, и в арбитражных моделях отправной точкой является предположение о случайных факторах, которые влияют на рыночные цены и закономерностях их динамики.

Однофакторные модели

Простейшее предположение, которое может быть сделано относительно структуры процентых ставок во времени и цен инструментов с фиксированным доходом - зависимость их от *единственного* случайного фактора. Формулы цен простых дисконтных облигаций определяются на основании предположений о вероятностных свойствах данного случайного фактора.

В качестве единственного фактора чаще всего выступает *краткосрочная спот-ставка* - доходность инструментов со сроком погашения один период - в случае дискретного времени, или *мгновенная ставка* - для непрерывного времени. Вообще говоря мгновенная ставка является скорее теоретической абстракцией, поскольку на реальном рынке трудно найти процентную ставку, которая вполне соответствовала бы этому понятию. Однодневные (овернайт) ставки не вполне подходят на эту роль, поскольку данный рынок является чрезвычайно специфичным и ставки овернайт часто слабо коррелированы с другими стаками на рынке. Часто более подходящими на роль мгновенноствки являются более длинные ставки (например недельные или месячные).

Даже если считать, что случайным фактором явяется не краткосрочная ставка, а какой-либо другой параметр, модель всегда может быть преобразована таким образом, что единственным случайным фактором является именно краткосрочная ставка. Предположение о единственном случайном факторе, определяющем колебания всех цен на рынке является чрезвычайно привлекательным вследствие своей простоты: в частности, оно дает возможность разработки относительно простых методов оценки финансовых инструментов.

Имея предположение о случайном процессе, описывающем динамику краткосрочной ставки, относительные цены простых дисконтных облигаций, как и цены других, более сложных, инструментов, определяются исходя из принципа *отсутствия возможности арбитража*.

Одни из первых моделей временной структуры процентных ставок были предложены Робертом Мертоном (1970) [ ], (1973) [ ] и Олдричем Васичеком (1977) [ ]. Неопределенность, в соответствии с данным подходом, ставшим господствующим в теории временной структуры процентных ставок, моделируется с помощью винеровского процесса (процесса броуновского движения). В *непрерывном* времени поведение случайного фактора (краткосрочной ставки x) описывается *процессом Ито* (стохастическим дифференциальным уравнением)

$$\mathrm{d}x = \mu_r(t,x)\mathrm{d}t + \sigma_r(t,x)\mathrm{d}\omega\,, \tag{7.1}$$

где x - мгновенная спот-ставка т.е. доходность[4] простой дисконтной облигации с бесконечно малым сроком погашения(обозначение использовано исключительно для упрощения записи, в действительности x - случайный процесс, т.е. случайная переменная, зависящая от времени t и состояния природы), $\mathrm{d}t$ - бесконечно малый интервал времени, $\mathrm{d}x$ - прирост (изменение) величины x за время $\mathrm{d}t$, $\mu_x(t,x)$ - ожидаемое значение прироста мгновенной ставки, приведенное к годовому измерению, $\sigma_x(t,x)$ - стандартное отклонение (также в годовом измерении) прироста мгновенной ставки, которое в финансах принято называть *волатильностью* (изменчивостью), ω - стандартный винеровский процесс.

Винеровский процесс (не в последнюю очередь, вследствие своей простоты) является важнейшим средством моделирования неопределенности в современных финансах. Стандартным винеровским процессом называют зависимую от времени случайную переменную $\omega(t)$, приращения которой во времени $\Delta\omega = \omega(t+\Delta t) - \omega(t)$ являются *независимыми нормально распределенными случайными величинами*, ожидаемое значение которых равно

[4] В *годовом измерении*: для удобства в качестве единицы времени будем использовать один год. Соответственно, все параметры, характеризующие ставки доходности приводятся в годовом измерении.

нулю, а стандартное отлонение - $\sqrt{\Delta t}$. В непрерывном времени, величину $\mathrm{d}\omega$ можно рассматривать как приращение стандарного винеровского процесса за бесконечно малый интервал времени.

Первое слагаемое в выражении (7.1) моделирует *тенденцию* изменения x , второе слагаемое - случайные колебания. Как тенденция $\mu_x(t,x)$, так и изменчивость (*волатильность*) $\sigma_x(t,x)$ в общем случае могут являться функциями времени и значения переменной x.

Пусть t - некоторый момент времени[5]. Считая, что цена простой дисконтной облигации со сроком погашения τ, $p(\tau)$, является функцией времени t и краткосрочной процентной ставки x (т.е. $p(\tau) \equiv p(t,T,x)$, $\tau = T - t$), в соответствии с известной *леммой Ито* (К. Ито ( ) [ ]) получим выражение для прироста цены за бесконечно малый промежуток времени

$$\mathrm{d}p(\tau) = \frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2 . \tag{7.2}$$

Подставляя в (7.2) вместо $\mathrm{d}x$ выражение (7.1), и применяя т.н. *мультипликативные правила Ито*[6] ($(\mathrm{d}\omega)^2 = \mathrm{d}t$, $(\mathrm{d}t)^2 = 0$, $\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}t = 0$) получим

$$\mathrm{d}p(\tau) = \mu_p(t,x)\mathrm{d}t + \sigma_p(t,x)\mathrm{d}\omega , \tag{7.3}$$

где

$$\mu_p = \frac{\partial p}{\partial t} + \mu_x(t,x)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_x^2(t,x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} , \tag{7.4}$$

$$\sigma_p = \sigma_x(x,t)\frac{\partial p}{\partial x} . \tag{7.5}$$

Цены простых дисконтных облигаций на конкурентном рынке должны быть такими, чтобы не существовало возможности арбитража. Выберем портфель, состоящий из облигаций двух видов (два различных срока погашения - t_1 и t_2) таким образом, чтобы его доходность за бесконечно малый промежуток времени была детерминированной величиной. Двух видов облигаций для этой цели достаточно, так как существует *лишь один* фактор риска - мгновення спот-ставка. Стоимость портфеля, состоящего из *одной*

[5] Обозначения здесь и далее несколько изменены по сравнению с предыдущими главами. Мы переходим к рассмотрению *динамики* процентных ставок, поэтому понятия *момент* времени и *промежуток* вемени теперь имеют разное значение. Моменты будут обозначаться латинскими буквами (t или T; текущий момент времени, как правило, обозначается t), *промежутки* времени от текущего момента до некоторого момента в будущем обозначаются греческими буквами (например, $\tau = T - t$).

[6] По сути, лемму Ито, являющуюся краеугольным камнем большинства современных финансовых теорий, можно рассматривать как стохастический *аналог* разложения обычной детерминированной функции в ряд Тейлора, когда точность разложения ограничивается вторым порядком производных.

простой дисконтной облигации со сроком погашения t_1 и η облигаций сроком t_2 равна

$$V = p(t_1) + \eta p(t_2)\,. \tag{7.6}$$

Далее, для упрощения записи $p(t_1)$ будем обозначать как p_1, $p(t_2)$ - как p_2. Прирост стоимости портфеля за бесконечно малый промежуток времени будет равен

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}p_1 + \eta \mathrm{d}p_2 = (\mu_1 + \eta\mu_2)\mathrm{d}t + (\sigma_1 + \eta\sigma_2)\mathrm{d}\omega\,, \tag{7.7}$$

где

$$\mu_i = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \mu_x(t,x)\frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_x^2(t,x)\frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2}\,,\ \ \sigma_i = \sigma_x\frac{\partial p_i}{\partial x}\,,\ \ i = 1{,}2\,.$$

Для того, чтобы доходность портфеля за время dt была детерминированной, необходимо, чтобы в выражении (7.7) коэффициент при случайной величине $\mathrm{d}\omega$ равнялся нулю, т.е.

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + \eta\frac{\partial p_2}{\partial x} = 0\,,$$

тем самым, коэффициент хеджирования (в данном случае - количество облигаций сроком погашения t_2) должен быть равен

$$\eta = -\frac{\partial p_1}{\partial x}\Bigg/\frac{\partial p_2}{\partial x} \tag{7.8}$$

Доходность безрискового портфеля (прирост стоимости в процентах) за время $\mathrm{d}t$, *если арбитраж невозможен*, должна равняться безрисковой мгновенной ставке

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = x\mathrm{d}t\,. \tag{7.9}$$

или, принимая во внимание содержимое портфеля:

$$\mathrm{d}V = x(p_1 + \eta p_2)\mathrm{d}t\,. \tag{7.10}$$

Приравнивая выражения (7.7) и (7.10), с учетом того, что величина η выбрана так, чтобы отсутствовал риск (т.е. в соответствии с (7.8)), после преобразований получим:

$$(\mu_1 - xp_1)\Bigg/\frac{\partial p_1}{\partial x} = (\mu_2 - xp_2)\Bigg/\frac{\partial p_2}{\partial x}\,.$$

Разделив последнее выражение на σ_x, получим, что *для всех* простых дисконтных облигаций, если отсутствует возможность арбитража, должно выполняться условие:

$$\frac{\mu_p - xp}{\sigma_p} = \lambda . \tag{7.11}$$

Здесь λ - величина, называемая *рыночной премией за риск*. Действительно, правая часть последнего выражения представляет собой т.н. *коэффициент Шарпа* для простой дисконтной облигации: числитель - это разница между ожидаемым доходом по облигации за бесконечно малый промежуток времени и безрисковым доходом, получаемым за это же время от инвестирования суммы p (цена облигации), знаменатель - волатильность облигации (все величины в годовом измерении). В общем случае λ может зависеть от времени и уровня краткосрочной ставки: $\lambda \equiv \lambda(t, x)$, но не зависит от характеристик конкретной облигации (в частности срока погашения).

Если λ равняется нулю, это означает, что все простые дисконтные облигации, независимо от срока погашения приносят инвесторам одинаковую доходность, которая равна краткосрочной ставке: $\mu_p = xp$, т.е. инвесторы не получают *премии за риск*, инвестируя в относительно более долгосрочные инструменты. Это возможно только если инвесторы обладают свойством нейтральности к риску (напомним, что нейтральным к риску называют человека для которого гарантированный доход C и случайный доход $\widetilde{C}$, ожидаемая величина которого равна C, являются совершенными заменителями). В действительности, это не так. Гораздо более правдоподобно считать, что большинство инвесторов к риску *не склонны*, т.е. выбирая между известной суммой денег C и случайной $\widetilde{C}$, такой, что $\mathbb{E}[\widetilde{C}] = C$, всегда отдают предпочтение гарантированному получению C. Это означает, что рисковые вложения могут заинтересовать инвестора, только если они приносят больший средний доход по сравнению с безрисковыми. В нашем случае, за малый промежуток премени инвестор может получить гарантированно x процентов годовых, либо может купить облигацию с более отдаленным сроком погашения - доход по ней за малый интервал времени случаен, так как зависит от будущих значений процентных ставок. Средняя (ожидаемая) доходность (в процентах годовых) по облигаци равна μ_p / p, и данная облигация может быть привлекательной для несклонного к риску инвестора только если $(\mu_p / p) - x > 0$, что означает $\lambda < 0$ (т.к. $\sigma_p = (\partial p / \partial x)\sigma_x < 0$ вследствие обратной зависимости цен процентных ставок).

Величина λ показывает сколько единиц дополнительного дохода инвестор может получить в расчете на одну дополнительную единицу риска (волатильности), на рынке она должна быть одинакова для всех инструментов, т.к. иначе бует возможен т.н. межвременной арбитраж - по отдельным облигациям на единицу риска можно будет получить больший доход. чем по другим, что неизбежно приведет к корректировке цен, пока для всех облигаций не будет выполняться (7.11).

Переписав уравнение (7.11), подставляя выражения для μ_p и σ_p (см. (7.4), (7.5)) получим следующее *дифференциальное уравнение в частных производных*:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mu_x - \lambda\sigma_x)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_x^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - xp = 0\,. \tag{7.12}$$

Найти выражение для цены простой дисконтной облигации, можно решив данное уравнение (для определенного вида функций[7] $\mu_x(t,x)$ и $\sigma_x(t,x)$). Предельным условием при решении уравнения (7.12) является равенство цены облигации в момент погашения единице, т.е. если T - момент погашения облигации, то в момент $t = T$ выполняется $p(T,T) = 1$.

Модель Васичека

Собственно *моделью Васичека* называют модель временной структуры процентных ставок, в которой динамика краткосрочной ставки имеет *тенденцию возврата* к равновесному значению[8], т.е. $\mu_x(t,x) = \alpha(\mu - x)$, где μ - долгосрочное равновесное значение краткосрочной ставки (константа), α - параметр, определяющий скорость возвратной тенденции (скорость приближения x к равновесному значению μ). Стандартное отклонение прироста процентной ставки в модели Васичека является константой, не зависящей от времени и значения x: $\sigma_x(t,x) \equiv \sigma$. Случайный процесс, описывающий динамику краткосрочной ставки в модели Васичека носит название процесса Орнштейна-Улинбека

$$\mathrm{d}x = \alpha(\mu - x)\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\omega\,. \tag{7.13}$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (7.12) запишется как

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \left[\alpha(\mu - x) - \lambda\sigma\right]\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - xp = 0\,, \tag{7.14}$$

причем рыночная премия за риск λ в модели Васичека также является константой.

Решением данного уравнения (с предельным условием $p(T,T) = 1$) является выражение для цены простой дисконтной облигации, погашаемой в момент T (через $\tau = T - t$ лет)

$$p(t,T) \equiv p(\tau) = e^{-\chi(\tau)\tau}\,, \tag{7.15}$$

[7] Явное решение можно получить не для всех возможных функций μ и σ.

[8] Наличие данного свойства почти всегда наблюдается в действительной динамике процентных ставок.

где $\chi(\tau) \equiv \chi(t,T,x)$ - *доходность* простой дисконтной облигации (спот-ставка) определяется как

$$\chi(\tau) = x\frac{\phi(\tau)}{\tau} + \left(\mu - \frac{\lambda\sigma}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right)\frac{\tau - \phi(\tau)}{\tau} + \frac{(\sigma\phi(\tau))^2}{4\alpha\tau}, \qquad (7.16)$$

где $\phi(\tau) = (1 - e^{-\alpha\tau})/\alpha$. Обозначим через x_∞ значение $\chi(\tau)$ при $\tau \to \infty$ (предельное значение долгосрочной ставки):

$$x_\infty = \lim_{\tau\to\infty}\chi(\tau) = \mu - \frac{\lambda\sigma}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}.$$

Тогда выражение для ставки спот в модели Васичека может быть представлено в виде

$$\chi(\tau) = x_\infty + (x - x_\infty)\frac{\phi(\tau)}{\tau} + \frac{(\sigma\phi(\tau))^2}{4\alpha\tau}. \qquad (7.17)$$

Определив функцию $\psi(\tau)$

$$\psi(\tau) = \left(\mu - \frac{\lambda\sigma}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right)(\tau - \phi(\tau)) + \frac{(\sigma\phi(\tau))^2}{4\alpha}, \qquad (7.18)$$

выражение (7.16) для цены простой дисконтной облигации можно записать

$$p(\tau) = \exp(-\phi(\tau)x - \psi(\tau)). \qquad (7.19)$$

Модель Мертона

Модель, в которой как и в модели Васичека все параметры - константы, но в отличие от последней возвратная тенденция в динамике краткосрочной ставки отсутствует, т.е. динамика мгновенной ставки описыается процессом $\mathrm{d}x = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\omega$ (μ и σ - константы), называют *моделью Мертона* (1970) [ ]. В этом случае спот-ставка сроком τ лет определяется в соответствии с соотношением

$$\chi(\tau) = x + \frac{1}{2}(\mu - \lambda\sigma)\tau - \frac{1}{6}\sigma^2\tau^2, \qquad (7.20)$$

цена простой дисконтной облигации соответственно

$$p(\tau) = \exp(-x\tau - \psi(\tau)),$$

где

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2}(\mu - \lambda\sigma)\tau^2 - \frac{1}{6}\sigma^2\tau^3.$$

Модель Мертона используется в основном в иллюстративных целях - как наиболее простая и интуитивно понятная модель временной структуры процентных ставок. Одним из основных ее недостатков является то, что представление спот-ставок как квадратичных функций времени погашения является абсолютно нереалистичным результатом - в частности, выражение (7.20) предполагает, что, начиная с определенного срока погашения ставки обязательно начинают снижаться и даже становятся отрицательными (см. Рис. 7.1). Кроме того, квадратичная функция слишком проста, чтобы иметь возможность отразить реальную структуру процентных ставок во времени (фактические рыночные цены).

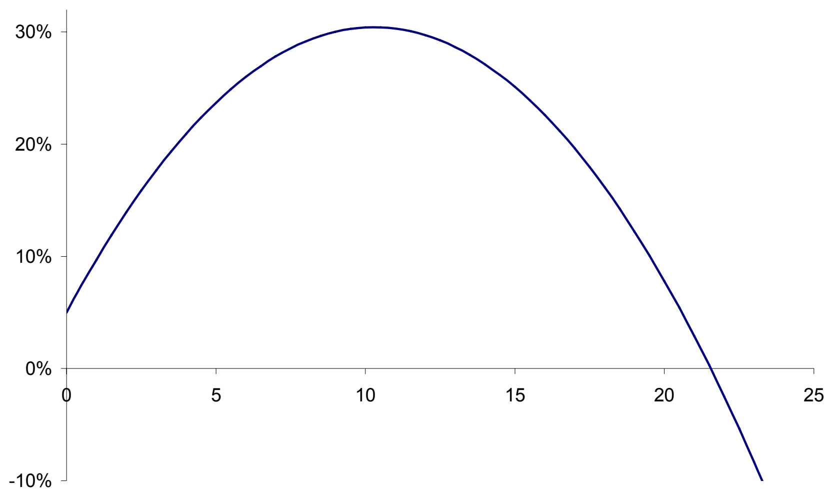


Рис. 7.1 Кривая спот-ставок в модели Мертона при значениях параметров (по горизонтали - время в годах).

Спот-кривая в модели Васичека (выражение (7.16)) является более гибкой по сравнению с моделью Мертона, хотя недостаточно для того, чтобы удовлетворительно моделировать реальные рыночные цены (см. Пример 7.2), и также допускает возможность отрицательных ставок.

Оценка параметров модели Васичека

Для практического использования модели структуры процентных ставок необходимо, используя рыночную информацию, оценить ее параметры. Оценивание параметров - один из наиболее важных и сложных этапов в моделировании временно́й структуры. Существует множество возможных подходов к решению этой задачи. Различия состоят в том - какие данные и

a.mertens

какие статистические методы используются для оценивания. Первый возможный подход - отдельные параметры, такие как скорость возвратной тенденции и долгосрочные равновесные значения процентных ставок в модели Васичека, оцениваются на основании исторических данных о динамике процентных ставок (временных рядов). Затем, недостающие параметры (например, рыночная премия за риск) подбирается таким образом, чтобы модель наилучшим образом воспроизводила рыночные цены. Альтернативный подход - подгонка параметров модели только лишь под текущие рыночные цены, добиваясь наиболее точного воспроизведения их моделью. Основным недостатком использования временных рядов является то, что в действительности параметры меняются во времени, и полученные на основании статистических процедур оценки в лучшем случае отражают их прошлые значение, тогда как для адекватного решения практических задач необходимы сегодняшние и ожидаемые в будущем. Поэтому для решения практических задач более приемлемым чаще всего оказывается второй подход.

Не менее важный вопрос - какой именно набор рыночных инструментов использовать для оценивания. Выбор зависит от того - какая информация доступна и с какой целью предполагается использовать модель. Скажем, если на рынке торгуют только простыми долговыми обязательствами, то в лучшем случае параметры можно оценить на основании текущей кривой доходности, использовать же данные о рыночных ценах опционов (без которых сложно обойтись оценивая инструменты со сложной нелинейной финансовой структурой) невозможно за отсутствием последних.

На основании *временного ряда* значений краткосрочной ставки могут быть оценены параметры μ, α и σ модели Васичека. Для этого можно использовать дискретный (с шагом Δt) вариант процесса (7.13)

$$x(t+\Delta t) - x(t) = \alpha(\mu - x(t))\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon(t)\,. \tag{7.21}$$

где $\varepsilon(t)$ - нормально распределенные случайные величины со средним 0 и дисперсией 1. Обозначим через x_t наблюдение над краткосрочной ставкой в момент t ($t = 0,1,\ldots,T$). Оценив параметры a и b линейной регрессии

$$x_{t+1} = a + bx_t + u_t\,, \tag{7.22}$$

получим оценки параметров

$$\hat{\mu} = \frac{a}{1-b}\,,\ \hat{\alpha} = \frac{1-b}{\Delta t}\,,\ \hat{\sigma} = \left(\frac{\mathrm{VAR}[u_t]}{\Delta t}\right)^{1/2}. \tag{7.23}$$

Ключевой проблемой в данном случае является то, что оценки, полученные с помощью обычного метода наименьших квадратов как правило не удовлетворительны. Это может быть связано с двумя причинами, которые могут проявляться одновременно: (1) неадекватность метода оценивания (отличное от нормального распределение остатков, автокорреляция остатков, гетероскедастичность) и (2) неадкватность самой модели - если процесс (7.21) неверно описывает реальную динамику процентных ставок. Проблема неадекватноти обычного метода наименьших квадратов может быть решена, если перейти к использованию других методов - таких как обобщенный метод моментов или метод максимального правдоподобия.

Проиллюстрируем примнение обобщенного метода моментов для оценки параметров модели Васичека. Величины u_t в регрессии (7.22) должны удовлетворять целому ряду условий - быть номально распределенными со средним 0 и дисперсией $\sigma^2 \Delta t$, что, в частности, означает

$$\mathbb{E}[u_t] = 0\,,\ \mathbb{E}[u_t^2 - \sigma^2\,\Delta t] = 0\,, \tag{7.24}$$

быть серийно некоррелированными с x_t, т.е. как минимум

$$\mathbb{E}[u_t x_t] = 0\,,\ \mathbb{E}[x_t(u_t^2 - \sigma^2\,\Delta t)] = 0\,, \tag{7.25}$$

быть серийно некоррелироваными между собой

$$\mathbb{E}[u_t u_{t+1}] = 0\,, \tag{7.26}$$

и т.п. На основании условий (7.24) - (7.26) запишем соответствующие моменты для выборки x_t ($t = 0,1,\dots,T$)

$$m_1 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} m_{1t} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(a + b x_{t-1} - x_t)\,, \tag{7.27}$$

$$m_2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} m_{2t} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[(a + b x_{t-1} - x_t)^2 - \sigma^2\,\Delta t\right], \tag{7.28}$$

$$m_3 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t(a + b x_{t-1} - x_t)\,, \tag{7.29}$$

$$m_4 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t\left[(a + b x_{t-1} - x_t)^2 - \sigma^2\,\Delta t\right], \tag{7.30}$$

$$m_5 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T-1}(a + b x_{t-1} - x_t)(a + b x_t - x_{t+1})\,. \tag{7.31}$$

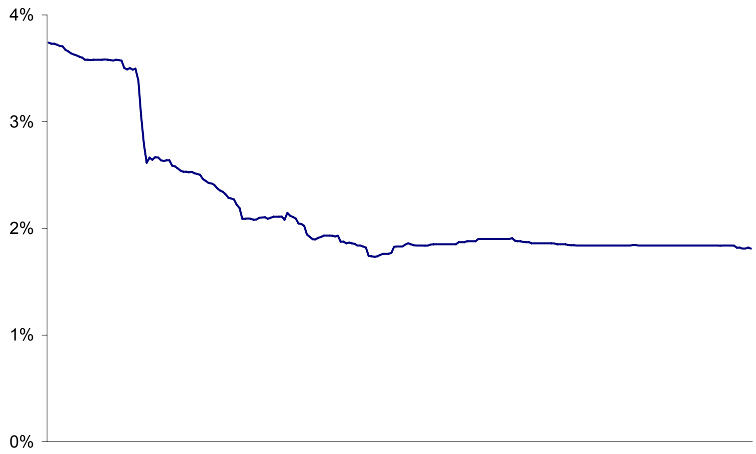


Рис. 7.2 LIBOR сроком один месяц по доллару США (период с июля 2001 по июль 2002 г., ежедневные данные).

Обозначим $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_5)'$, $\boldsymbol{m}_t = (m_{1t}, \ldots, m_{5t})'$. Оценка вектора параметров (a, b, θ) обобщенным методом моментов сводится к нахождению таких их значений, которые минимизируют функцию

$$\boldsymbol{m}'\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{m}\,, \tag{7.32}$$

где $\boldsymbol{W}$ - матрица весовых коэффициентов, определяемая как[9]

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{m}_t\boldsymbol{m}_t'\,, \tag{7.33}$$

Боле простой (но не оптимальный в случае, когда количество моментов превышает количество оцениваемых параметров) критерий - минимизировать сумму квадратов моментов

$$\boldsymbol{m}'\boldsymbol{m}\,. \tag{7.34}$$

Метод максимального правдоподобия, по-видимому, является наиболее предпочтительным для оценки параметров модели Васичека по историческим данным. Оценками будут такие значения (a, b, θ), при которых функция

$$-\frac{\alpha}{\sigma^2(1-e^{-2\alpha\Delta t})}\sum_{t=1}^{T}\left[x_t-(\mu+e^{-\alpha\Delta t}(x_{t-1}-\mu))\right]-\frac{T}{2}\ln\left[\frac{\sigma^2(1-e^{-2\alpha\Delta t})}{2\alpha}\right] \tag{7.35}$$

[9] Матрица весовых коэффициентов $\boldsymbol{W}$ - это оценка асимптотической ковариационной матрицы вектора $\boldsymbol{m}$ (см. Грин (1993) [ ]).

достигает максимума. (7.35) является логарифмом функции правдоподобия (без слагаемого $-(T/2)\ln(2\pi)$, не влияющего на поиск оптимума).

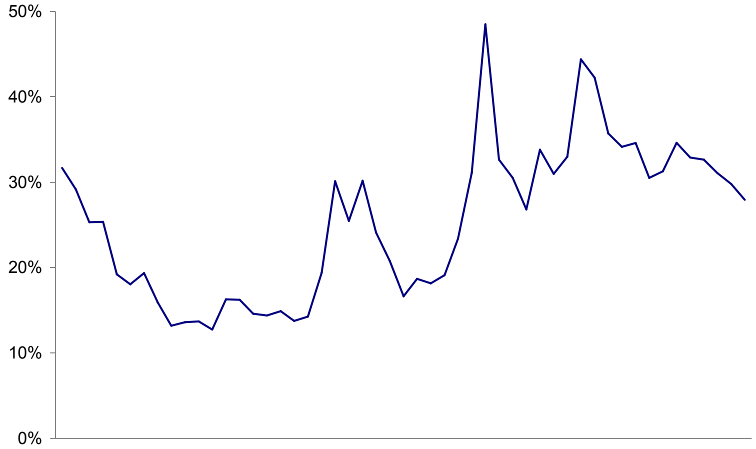


Рис. 7.3 Средневзвешенная ставка по межбанковским кредитам сроком один месяц на киевском рынке (период с ноября 2000 по ноябрь 2001 г., недельные данные).

Пример 7.1 Оценка параметров модели Васичека по историческим данным

В качестве примера проведем оценку параметров модели Васичека используя два массива данных - еженедельные данные по средним ставкам Киевского рынка межбанковских кредитов (KIBOR) сроком один месяц за период с ноября 2000 по ноябрь 2001 г. (Рис. 7.3) и ставки 1-месячного LIBOR по доллару США за период с июля 2001 по июль 2002 г. (ежедневные данные - Рис. 7.2).

Для оценки использовались три метода - (1) оценка регрессии (7.22) обычным методом наименьших квадратов, (2) обычный метод моментов: использованы моменты (7.27), (7.28), (7.30); т.к. число моментов в данном случае равно числу параметров, минимизируется (точнее - приравнивается к нулю) критерий (7.34), и (3) метод максимального правдоподобия.

Полученные оценки параметров приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1 Параметры модели Васичека по данным USD LIBOR (2001 - 2002) и KIBOR (2000 - 2001)

	μ	α	σ
		LIBOR (2001 - 2002)	
Метод наименьших квадратов	0.01653	5.1649	0.0062
Метод моментов	0.01653	5.2018	0.0088
Метод максимального правдоподобия	0.01653	5.2018	0.0088

		KIBOR (2000 - 2001)	
Метод наименьших квадратов	0.2492	8.6379	0.3539
Метод моментов	0.2418	9.7251	0.3843
Метод максимального правдоподобия	0.2492	9.4437	0.5410

Как видим, в случае LIBOR метод моментов и метод максимального правдоподобия дали идентичные результаты, тогда как оценки обычного МНК несколько отличаются. В случае с KIBOR все три метода дали различные результаты. В целом, еще раз подчеркнем неадекватность применения как МНК так и обычного метода моментов для данной задачи (в последнем случае по причине того, что результаты зависят от выбора моментов), поэтому следует использовать метод максимального правдоподобия либо обобщенный метод моментов.

Значение премии за риск λ необходимо подобрать таким образом, чтобы наиболее точно воспроизвести реальную кривую доходности. Пусть имеются фактические значения спот-ставок на определенную дату (первая колонка в таблице 7.2). Значение λ подберем таким образом, чтобы минимизировать сумму квадратов отклонений фактических ставок и теоретических значений, расчитываемых в соответствии с формулой (7.17). Получим, что

$$\lambda = -7{,}456\,,\ x_\infty = 2{,}909\%\,.$$

Фактические значения процентных ставок и теоретическая кривая доходности модели Васичека представлены на Рис. 7.4 и в таблице 7.2. Как видим, полученная торетическая кривая и реальные значения существенно различаются - результат, который нельзя считать удовлетворительным. Причинами являются слишком простая форма кривой спот-ставок в модели Васичека, а также использование значений параметров, оцененных по историческим данным: подбор только лишь одного параметра λ недостаточен, чтобы даже с минимальной точностью воспроизвести реальные рыночные цены.

Таблица 7.2 Фактическая и теоретическая (модель Васичека) кривые доходности (μ, α и σ оценены по историческим данным методом максимального правдоподобия)

Срок (τ)	$\chi(\tau)$		$p(\tau)$	
	Фактич.	*Модель*	*Фактич*	*Модель*
1 мес.	1.810%	1.330%	0.9985	0.9989
3 мес.	1.812%	1.820%	0.9955	0.9955
6 мес.	1.830%	2.216%	0.9909	0.9890
9 мес.	1.875%	2.420%	0.9860	0.9820
1 год	1.975%	2.537%	0.9804	0.9749
2 года	2.350%	2.722%	0.9541	0.9470
5 лет	3.150%	2.834%	0.8543	0.8679
10 лет	3.950%	2.872%	0.6737	0.7504

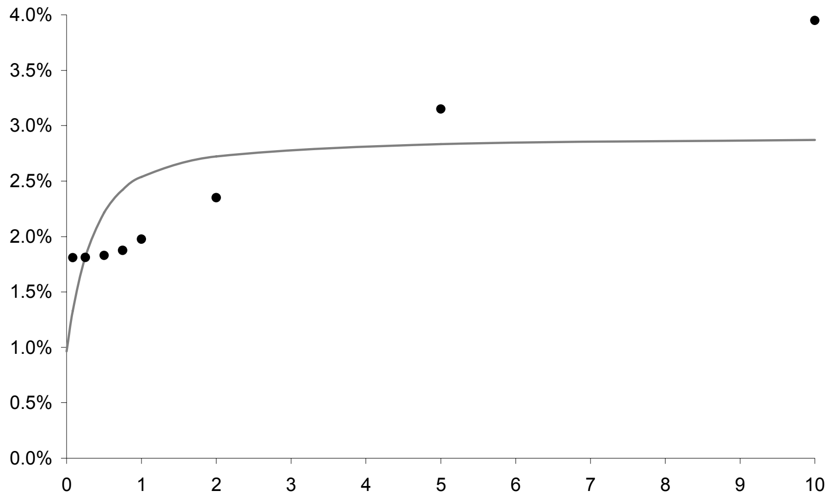


Рис. 7.4 Фактическая (точки; данные - первая колонка табл. 7.2) и теоретическая (сплошная линия) кривые спот-ставок по доллару США. Рисунок иллюстрирует недовлетворительное воспроизведение моделью реальных рыночных цен в случае, когда параметры оценивались по историческим данным.

Если сама модель неверно описывает исходные данные, - это возможно означает необходимость выбора другой (более адекватной) модели. Проблема состоит в том, что, как показывают исследования (см. напр. известную работу Чан и др. (1992) [ ]), *практически все известные однофакторные модели неудовлетворительно моделируют динамику процентных ставок*. Означает ли это, что однофакторные модели не имеют никакого практического значения? Нет, не означает, но необходимо правильно понимать - какие задачи могут быть решены с помощью однофакторных моделей, а какие - нет. Критически важно внимательное отношение к выбору методов оценивания параметров модели и проверка того - выполняются ли предположения, лежащие в основе используемой статистической процедуры.

Альтернативный подход оценивания параметров модели - подгонка не под исторические данные, а под текущие рыночные цены. Основной аргумент в пользу этого состоит в том, что именно текущие, а не прошлые цены содержат информацию об ожиданиях рынка относительно будущих уровней доходности, волатильности, и т.п. Подгонка модели под цены простых долговых обязательств (текущую кривую доходности) в целом аналогична рассмотренным в 4-главе задачам сглаживания кривой доходности, но теперь функциональная форма кривой определяется избранной моделью - например, в модели Васичека функциональная форма кривой спот-ставок задана выражением (7.16). Набором оцениваемых параметров может быть

$(x_\infty, \alpha, \sigma)$ либо $(\tilde{\mu}, \alpha, \sigma)$, где $\tilde{\mu} = \mu - \lambda\sigma / \alpha$. Отметим, что используя только лишь текущие данные (перекрестную выборку) невозможно оценить рыночную премию за риск λ. Для этого нужно дополнительно, на основании временного ряда краткосрочной ставки (исторических данных) оценить величину μ.

Пример 7.2 Оценка параметров модели Васичека по текущей кривой доходности

Воспользуемся данными о процентных ставках по доллару США из первой колонки табл.7.2.

Параметры $(\tilde{\mu}, \alpha, \sigma)$ будем выбирать таким образом, чтобы минимизировать сумму квадратов отклонений фактических и теоретических (выражение (7.17)) спот-ставок. В качестве оценки для μ используем полученную из исторической информации величину 0,01653. В результате решения задачи минимизации получены следующие значения параметров:

$$\tilde{\mu} = 0{,}06292\,,\ \alpha = 0{,}1566\,,\ \sigma = 0{,}000974\,,\ \lambda = -7{,}456\,.$$

Фактические и теоретические (соответствующие полученным знаениям параметров) значения ставок спот и коэффициентов дисконтирования приведены в табл. 7.3. и на Рис. 7.5. Как видим, даже выбирая параметры, наилучшим образом соответствующие наблюдаемой кривой доходности, добиться точного воспроизведения последней с помощью модели не удается, что является еще одним подтверждением слишком упрощенного характера модели Васичека.

Явным недостатком рассмотренного подхода является сложность решения задачи нелинейной оптимизации (минимизации суммы квадратов отклонений). Так как оцениваемые параметры входят в целевую функцию в сочетании одни с другими, различные комбинации параметров обеспечивают практически одну и ту же точность приближения к оптимальному значению целевой функции (кроме того, возможно наличие нескольких локальных минимумов, т.е. результат становится зависимым от начального приближения). Соответственно, говорить о точных оценках парметров (в частности, волатильности σ) не приходится.

Таблица 7.3 Фактическая и теоретическая (модель Васичека) кривые доходности (параметры модели оценены таким образом, чтобы наболее точно воспроизвести текущие фактические знения процентных ставок)

Срок (τ)	$\chi(\tau)$		$p(\tau)$	
	Фактич.	*Модель*	*Фактич*	*Модель*
1 мес.	1.810%	1.720%	0.9985	0.9986
3 мес.	1.812%	1.779%	0.9955	0.9956
6 мес.	1.830%	1.865%	0.9909	0.9907
9 мес.	1.875%	1.950%	0.9860	0.9855
1 год	1.975%	2.032%	0.9804	0.9799
2 года	2.350%	2.341%	0.9541	0.9543
5 лет	3.150%	3.100%	0.8543	0.8564
10 лет	3.950%	3.966%	0.6737	0.6726

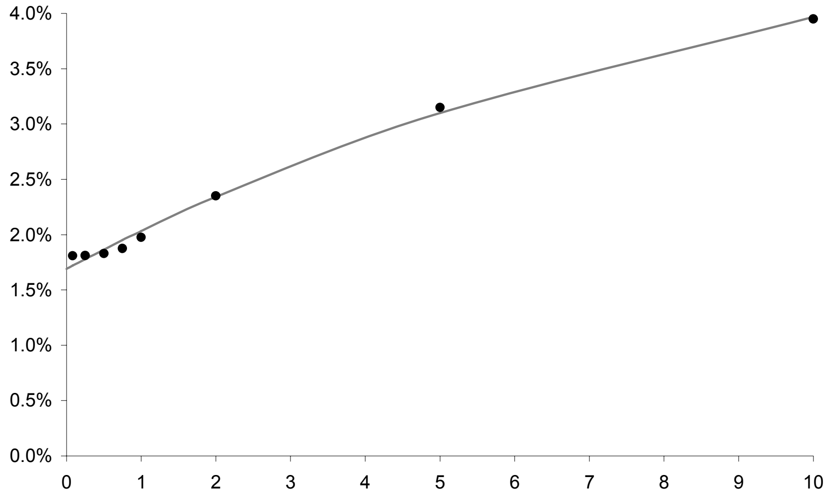


Рис. 7.5 Фактическая (точки) и теоретическая (сплошная линия) кривые спот-ставок по доллару США при подгонке параметров модели Васичека под текущую кривую доходности.

Модель Халла-Уайта

Модель Васичека упрощает действительность как минимум в силу того, что все параметры считаются константами, в то время как статистические наблюдения за динамикой процентных ставок свидетельствуют о том, что как равновесные значения, так и волатильность процентных ставок, по-видимому, меняются со временем. Модель, аналогичная модели Васичека по форме случайного процесса, но с изменяющимися во времени параметрами, носит название модели Дж. Халла и А. Уайта (1990) [ ], (1993) [ ] или *расширенной модели Васичека*. Динамика краткосрочной ставки в модели Халла-Уайта может быть представлена как

$$\mathrm{d}\,x(t) = \alpha(t)(\mu(t) - x)\,\mathrm{d}\,t + \sigma(t)\,\mathrm{d}\,\omega\,. \tag{7.35}$$

В практических приложениях часто используется частный случай модели Халла-Уайта, когда параметры α и σ, как и в модели Васичека, являются константами:

$$\mathrm{d}\,x(t) = \alpha(\mu(t) - x)\,\mathrm{d}\,t + \sigma\,\mathrm{d}\,\omega\,. \tag{7.36}$$

Изменчивость во времени равновесного значения процентной ставки влечет изменчивость во времени премии за риск $\lambda \equiv \lambda(t)$. Введя обозначение

$$\theta(t) = \alpha\mu(t) - \lambda(t)\sigma ,$$

дифференциальное уравнение в частных производных (7.12) для случая (7.36) можно записать как

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\theta(t) - \alpha x)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - xp = 0 . \tag{7.37}$$

Решением уравнения (7.37) является цена простой дисконтной облигации в модели Халла-Уайта

$$p(\tau) = \exp(-\phi(\tau)x - \psi(\tau)) , \tag{7.38}$$

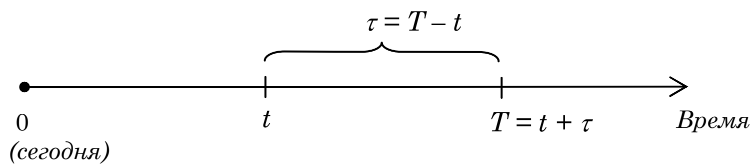
где $\phi(\tau)$ определяется также, как и ранее

$$\phi(\tau) = \frac{1 - \exp(-\alpha\tau)}{\alpha} , \tag{7.39}$$

а функция $\psi(\tau)$ принимает вид

$$\psi(\tau) = -\frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(\tau - \phi(\tau)) + \frac{(\sigma\phi(\tau))^2}{4\alpha} + \int_t^{t+\tau} \phi(t + \tau - s)\theta(s)\,\mathrm{d}\,s . \tag{7.40}$$

Наиболее важным преимуществом модели Халла-Уайта по сравнению с классической моделью Васичека является возможность *точного* отображения фактических рыночных цен (рыночной структуры процентных ставок во времени). Это достигается за счет подбора соответствующей функции $\theta(t)$. Пусть 0 - сегодняшний момент времени:



сответственно, если $p_0(t) = p(0,t)$ - наблюдаемая на рынке в момент 0 кривая коэффициентов дисконтирования ($t \in [0,T]$ - момент погашения),

$$\varphi_0(t) = -(\partial p_0(t) / \partial t) / p_0(t)$$

- соответствующая ей кривая форвардных ставок, то функция $\theta(t)$, определенная как

$$\theta(t) = \alpha\varphi_0(t) + \frac{\partial \varphi_0(t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}) , \tag{7.41}$$

обеспечит точное соответствие модели и наблюдаемой на рынке структуры процентных ставок.

С учетом (7.41) цена простой дисконтной облигации, погашаемой в момент $T = t + \tau$, в момент t будет равна

$$p(\tau) = \exp(-\tau\chi(\tau)) = \exp\left(-\phi(\tau)(x - \varphi_0(t)) - \int_t^{t+\tau}\varphi_0(s)\mathrm{d}s - \frac{\upsilon^2}{2}\right), \tag{7.42}$$

где

$$\upsilon = \sigma\phi(\tau)\left(\frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha}\right)^{1/2};$$

интеграл в показателе степени правой части выражения (7.42) можно представить как известную на момент 0 форвардную ставку на промежутке между t и $t + \tau$:

$$\int_t^{t+\tau}\varphi_0(s)\mathrm{d}s = \ln(p_0(t+\tau)/p_0(t)) = \tau\varphi_0(t, t+\tau),$$

тем самым, (7.42) можно переписать как

$$p(\tau) = \frac{p_0(t+\tau)}{p_0(t)}\exp\left(-\phi(\tau)(x - \varphi_0(t)) - \frac{\upsilon^2}{2}\right). \tag{7.42'}$$

Модель Хо-Ли

Модель Т. Хо и С.-Б. Ли (1986) [ ] - исторически первая модель, построенная таким образом, чтобы *в точности* воспроизводить реальную временную структуру процентных ставок. В этом она подобна модели Халла-Уайта, являясь, по-существу, частным случаем последней. Отличие состоит в отсутствии возвратной тенденции в динамике краткосрочной ставки, что, очевидно, является одним из основных ее недостатков. Изначально авторами была разработана модель в дискретном времени. В *непрерывном аналоге* модели Хо-Ли динамика краткосрочной ставки описывается процессом

$$\mathrm{d}x = \alpha(t)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}\omega. \tag{7.43}$$

Дифференциальное уравнение в частных производных, являющееся условием отсутствия арбитражных возможностей принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\alpha(t) - \lambda\sigma)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - xp = 0 \tag{7.44}$$

Решением уравнения (7.44) с предельным условием $p(T,T)=1$ является цена (на момент t) простой дисконтной облигации, погашаемой в момент T ($\tau = T - t$)

$$p(\tau) = \exp(-\chi(\tau)\tau) = \exp(-x\tau - \psi(\tau)),$$

где

$$\psi(\tau) = -\frac{1}{2}\lambda\sigma\tau^2 - \frac{1}{6}\sigma^2\tau^3 + \int_{T-\tau}^{T}\mu(s)(T-s)\,\mathrm{d}s,$$

спот-ставка в свою очередь равна

$$\chi(\tau) = x + \frac{\psi(\tau)}{\tau}.$$

Точное соответствие модели наблюдаемой структуре процентных ставок достигается выбором функции $\mu(t)$:

$$\mu(t) - \lambda\sigma = \theta(t) = \sigma^2 t + \frac{\partial\varphi_0(t)}{\partial t},$$

где $\varphi_0(t)$, - как и в модели Халла-Уайта, наблюдаемая на рынке в момент 0 форвардная кривая.

Модель Кокса-Ингерсолла-Росса

Модель временной структуры, предложенная Дж. Коксом, Дж. Ингерсоллом и С. Россом (модель *CIR*) (1985) [ ] - классический пример модели равновесия, построенной на базе анализа оптимизирующих решений экономических агентов. Рассматривая динамическую (в непрерывном времени) модель экономики с единственным благом и единственным фактором неопределенности U, который изменяется в соответствии с процессом

$$\mathrm{d}U = (A - BU)\mathrm{d}t + V\sqrt{U}\mathrm{d}\omega,$$

(A, B и V - константы), исходя из стандартных неоклассических предположений (конкурентность рынков, постоянная отдача от масштаба производственных функций, несклонность к риску домашних хозяйств, и т.д.), авторы модели показали, что в состоянии равновесия краткосрочная процентная ставка является линейной функцией случайного фактора U. Это означает, что процесс для мгновенной ставки x может быть представлен в виде

$$\mathrm{d}x = \alpha(\mu - x)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{x}\,\mathrm{d}\omega. \tag{7.45}$$

Спот-ставка $\chi(\tau)$ сроком погашения τ определяется в модели Кокса-Ингерсолла-Росса как

$$\chi(\tau) = \frac{\phi(\tau)}{\tau} x + \frac{\psi(\tau)}{\tau} , \tag{7.46}$$

где

$$\phi(\tau) = -\frac{\mathrm{sh}(\gamma\tau)}{\gamma\,\mathrm{ch}(\gamma\tau) + (1/2)\alpha\,\mathrm{sh}(\gamma\tau)} ,$$

$$\psi(\tau) = \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} \ln\left(\frac{\gamma \exp(\alpha\tau/2)}{\gamma\,\mathrm{ch}(\gamma\tau) + (1/2)\alpha\,\mathrm{sh}(\gamma\tau)} \right),$$

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2} \Big/ 2 ,$$

$\mathrm{sh}(\cdot)$ и $\mathrm{ch}(\cdot)$ - соответственно гиперболический синус и косинус:

$$\mathrm{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} , \quad \mathrm{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} .$$

Используя определенные выше функции $\phi(\tau)$ и $\psi(\tau)$, выражение для цены простой дисконтной облигации можно записать аналогично моделям Васичека и Халла-Уайта (см. (7.19) и (7.38)). Параметры модели Кокса-Ингерсолла-Росса могут оценены подобно тому, как оцениваются параметры модели Васичека - т.е. так, чтобы спот-ставки (7.36) наиболее точно соответствовали бы рыночным значениям. Хотя спот-кривая (7.36) яляется достаточно гибкой, она, тем не менее, не может описать некоторые часто встречающиеся формы кривых доходности (например, при наличии одного или нескольких «изгибов»).

Обобщенная однофакторная модель

Рассмотренные выше однофакторные модели с постоянными параметрами (модели Мертона, Васичека, Кокса-Ингерсолла-Росса и ряд других) могут быть обобщены, если процесс для краткосрочной ставки представить в виде

$$\mathrm{d}x = (\mu_1 + \mu_2 x)\mathrm{d}t + \sigma r^{\beta} \mathrm{d}\omega . \tag{7.47}$$

При $\mu_2 = 0$ и $\beta = 0$ получим модель Мертона, при $\mu_1 = \alpha\mu$, $\mu_2 = -\alpha$ и $\beta = 0$ - модель Васичека, наконец, при $\beta = 1/2$ - модель Кокса-Ингерсолла-Росса. Модель (7.47) предложена в работе Чана, Каролаи, Лонгстаффа и Сандерса (1992) [ ].

Все рассмотренные выше модели принадлежат к классу так называемых *аффинных моделей* - поскольку процентные ставки с различными сроками погашения могут быть представлены как линейные функции случайного фактора - мгновенной ставки (как в соотношении (7.46)).

Двухфакторные модели

Модели, в которых присутствует только лишь один фактор риска, просты и удобны в использовании, как при оценивании параметров, так и для оценки финансовых инструментов и хеджирования. Во многих ситуациях их использование оправдано и дает удовлетворительные результаты - в первую очередь когда основным источником риска, который необходимо хеджировать, является измененение общего уровня процентных ставок. Достаточность однофакторных моделей для практичесих целей может подтверждаться с помощью анализа главных компонент - если первая главная компонента объясняет львиную долю (80% - 90%) колебаний процентных ставок.

Тем не менее, простота однофакторных моделей является и их главным недостатком. В первую очередь, ключевое предположение, лежащее в основе однофакторной модели - об абсолютной коррелированости процентных ставок по всем срокам погашения, - не подтверждается на практике. Можно говорить о высокой корреляции ставок с близкими сроками погашения, но коэффициенты корреляции краткосрочных (до года) и долгосрочних (свыше 10 лет) ставок, как правило, существенно меньше единицы. Наличем только лишь одного фактора может объясняться факт, что однофакторная модель (это относится к равновесным моделям типа Васичека или Кокса-Ингерсолла-Росса) неудовлетворительно воспроизводит фактические рыночные цены даже простых процентных инструментов (облигаций), не говоря уже об опционах.

Все вышесказанное говорит в пользу того, что существенно более точные результаты в задачах оценки и хеджирования (что предельно важно с точки зрения применения моделей на практике) могут быть получены с использованием моделей, содержащих более чем один случайный фактор. Более того, множество современных финансовых инструментов просто не могут быть оценены на основании однофакторной модели - инструмент, разработанный для хеджирования фактора риска, отсутствующего в модели (например, хеджирование разворота или изменения наклона временной структуры процентных ставок), в рамках этой модели не может быть оценен. Оборотной стороной здесь выступает сложность, опять же - с точки зрения практического применения. Приемлемой альтернативой есть использование двухфакторных моделей. Статистические исследования свидетельствуют, что первые три главные компоненты, как правило, объясняют более 90% - 95% колебаний процентных ставок, первые две - более 80% - 90%, т.е.

использование двухфакторных моделей может быть вполне достаточным с практической точки зрения[10].

Если первым случайным фактором в двух факторных моделях как правило остается мгновенная ставка, то наиболее распространенными вариантами выбора второго фактора являются степень изменчивости (волатильность) мгновенной ставки либо ее долгосрочное равновесное значение.

В качестве примера двухфакторной модели мы приведем модель равновесия Лонгстаффа и Шварца (1992) [ ].

Модель Лонгстаффа-Шварца

По построению данная модель является моделью общего равновесия (подобно модели Кокса-Ингерсолла-Росса). Не вдаваясь в подробности базовых предположений относительно функционирования экономики (в целом они, как и в модели Кокса-Ингерсолла-Росса, соответствуют стандартным неоклассическим допущениям - постоянная отдача от масштаба технологического процесса, несклонность к риску домашних хозяйств, описываемая логарифмической функцией полезности, и т.д.), отметим, что неопределенность в модели представляют два случайных фактора y_1 и y_2, интерпретируемых как компоненты доходности реальных инвестиций, одна из которых связана, другая - не связана с волатильностью доходности. Норма отдачи реальных инвестиций описывается случайным процессом

$$\mathrm{d}r(t) = (\mu y_1 + \eta y_2)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{y_2}\,\mathrm{d}\omega\ ,$$

соответственно, динамика случайных факторов y_1 и y_2 следует закономерностям

$$\mathrm{d}y_1(t) = (\mu_1 - \mu_2 y_1(t))\mathrm{d}t + \sigma_1\sqrt{y_1(t)}\,\mathrm{d}\omega_1\ ,$$

$$\mathrm{d}y_2(t) = (\mu_3 - \mu_4 y_2(t))\mathrm{d}t + \sigma_2\sqrt{y_2(t)}\,\mathrm{d}\omega_2$$

где μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, σ_1, σ_2 - константы, ω_1 и ω_2 - два взаимонезависимых винеровских процесса.

Краткосрочная процентная ставка $x(t)$ и ее волатильность $v(t)$ (дисперсия мгновенного прироста краткосрочной ставки: $(\mathrm{d}x)^2 = v\mathrm{d}t$) являются линейными функциями случайных факторов

$$x(t) = ay_1 + by_2\ ,\ v(t) = a^2 y_1 + b^2 y_2\ ,$$

[10] Тем не менее, подчеркнем еще раз, что наиболее правильный подход - использование модели, адекватной решаемой задаче. Для каких-то задач вполне достаточно обычной однофакторной модели Васичека, для других - требуется трехфакторная модель.

соответственно, модель может быть представлена таким образом, что исходными случайными факторами являются $x(t)$ и $v(t)$. Приросты данных случайных процессов можно записать как

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x = {} & \left[ac + bg - \frac{bd - ah}{b - a}x - \frac{h - d}{b - a}v\right]\mathrm{d}t \\ & + \left[\frac{a(bx - v)}{b - a}\right]^{1/2}\mathrm{d}\omega_1 + \left[\frac{b(v - ax)}{b - a}\right]^{1/2}\mathrm{d}\omega_2 \end{aligned}, \tag{7.48}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v = {} & \left[a^2c + b^2g - \frac{ab(d - h)}{b - a}x - \frac{bh - ad}{b - a}v\right]\mathrm{d}t \\ & + \left[\frac{a^3(bx - v)}{b - a}\right]^{1/2}\mathrm{d}\omega_1 + \left[\frac{b^3(v - ax)}{b - a}\right]^{1/2}\mathrm{d}\omega_2 \end{aligned}. \tag{7.49}$$

где c, d, g, h - константы, выраженные через исходные параметры μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, σ_1, σ_2 (вид этих выражений уже не важен, поскольку $x(t)$ и $v(t)$ теперь рассматриваются как базовые случайные факторы, соответственно a, b, c, d, g, и h - это параметры, значения которых необходимо оценить используя реальную рыночную информацию). Экономической интерпретацией параметров модели можно считать выражения для среднего и дисперсии случайных фактров x и v:

$$\mathbb{E}[x] = \frac{ac}{d} + \frac{bg}{h}, \ \mathrm{VAR}[x] = \frac{ac}{2d^2} + \frac{bg}{2h^2}, \tag{7.50}$$

$$\mathbb{E}[v] = \frac{a^2c}{d} + \frac{b^2g}{h}, \ \mathrm{VAR}[v] = \frac{a^4c}{2d^2} + \frac{b^4g}{2h^2}. \tag{7.51}$$

Равновесная цена в момент t простой дисконтной облигации $p(\tau)$, погашаемой через $\tau = T - t$ лет равняется

$$p(\tau) = \phi^{2c}(\tau)\psi^{2g}(\tau)\exp(k\tau + \delta(\tau)x + \gamma(\tau)v), \tag{7.52}$$

где

$$\phi(\tau) = \frac{2m}{2m + (d + m)(e^{m\tau} - 1)},$$

$$\psi(\tau) = \frac{2q}{2q + (l + q)(e^{q\tau} - 1)},$$

$$\delta(\tau) = \frac{am(e^{q\tau} - 1)\psi(\tau) - bq(e^{m\tau} - 1)\phi(\tau)}{mq(b - a)},$$

$$\gamma(\tau)=\frac{q(e^{m\tau}-1)\phi(\tau)-m(e^{q\tau}-1)\psi(\tau)}{mq(b-a)},$$

$$k=g(l+q)+c(d+m),$$

$$m=(2a+d^2)^{1/2},\ q=(2b+l^2)^{1/2},$$

$$l=\lambda+h,$$

через λ, как и ранее, обозначена рыночная премия за риск.

В отношении оценки параметров модели возможны различные подходы. Две крайности, как и ранее - производить оценку на основании исторических временных рядов, либо - подгонять под текущую структуру процентных ставок. Практически используется та или иная комбинация двух подходов - когда часть параметров оценивают по историческим данным, часть - по текущим, либо оценку основывают на динамике всей временной структуры - нескольких спот-ставок. Пример такого метода оценки будет рассмотрен ниже.

Наиболее часто рекомендуемыми в литературе[11] методами для оценки параметров моделей, в которых некоторые из случайных факторов непосредственно не наблюдаемы (в модели Лонгстаффа-Шварца это - волатильность мгновенной ставки), являются обобщенный метод моментов либо Калмановская фильтрация. Мы проиллюстрируем применение первого.

Модели процентных ставок и хеджирование

Методы хеджирования и иммунизации портфеля, рассматривавшиеся в главах 5 и 6, основывались на показателе *дюрации* - относительном изменении цены долгового обязательства при небольшом параллельном сдвиге процентных ставок. Например портфель, состоящий из Z_A облигаций *A* и Z_B облигаций *B*, будет нечувствителен к небольшим параллельным сдвигам временной структуры, если отношение стоимости позиций по облигациям *A* и *B* (коэффициент хеджирования) равняется отношению дюраций с обратным знаком, т.е. $h=Z_BP_B/Z_AP_A=-\mathcal{D}_A/\mathcal{D}_B$. Подчеркнем еще раз, что такой выбор коэффициента хеджирования эффективен *только* для случая, когда все спот-ставки $\chi(\tau)$ изменяются *паралельно*, т.е. могут быть представлены в виде

$$\chi(\tau)=x+s(\tau). \tag{7.53}$$

[11] см. напр. Джеймс и Уэббер (2000) [ ].

Чувствительность простой дисконтной облигации по отношению к краткосрочной ставке (дюрация) в этом случае равна просто сроку погашения

$$-\frac{1}{p(\tau)}\frac{\partial p(\tau)}{\partial x}=-\frac{1}{p(\tau)}\frac{\partial(e^{-(x+s(\tau))\tau})}{\partial x}=\tau\ . \qquad (7.54)$$

Но даже простые однофакторные модели модели процентных ставок предполагают более сложный, чем (7.53) вид зависимости спот-ставок от мгновенной ставки. Из всех рассмотренных выше моделей, только простейшая иллюстративная модель Мертона приводит к выражению для $\chi(\tau)$ подобному (7.53): из соотношения (7.20) видим, что спрэд между ставкой $\chi(\tau)$ и мгновенной ставкой x определяется как $s(\tau)=(\mu-\lambda\sigma)\tau/2-\sigma^2\tau^2/6$. Т.е. предполагать возможность исключительно параллельных сдвигов кривой доходности по сути эквивалентно предположению о том, что динамика процентных ставок находится под воздействием единственного фактора риска (краткосрочной ставки), который следует случайному процессу с постоянными параметрами без возвратной тенденции: $\mathrm{d}x=\mu\,\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{d}\omega$. Естественно, что такое предположение нереалистично, как минимум потому, что противоречит статистичекому анализу динамики процентных ставок (например, результатам анализа главных компонент - см. главу 4) и приводит к нереалистичному виду кривой спот-ставок (напомним, что в модели Мертона кривая спот-ставок - квадратичная функция, допускающая отрицательные значения). Следовательно, выбор коэффициентов хеджирования на основании показателей дюрации вообще говоря не вполне эффективен и может не застраховать от потерь при более или менее реалистичном изменении структуры процентных ставок. Более точным подходом является определение коэффициента хеджирования на основании более или менее адекватной модели динамики процентных ставок.

В модели Васичека цены простых дисконтных облигаций (коэффициенты дисконтирования) определяются в соответствии с формулой (7.19), тем самым аналогом дюрации будет показатель

$$-\frac{1}{p(\tau)}\frac{\partial p(\tau)}{\partial x}=\frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha}=\phi(\tau)\ . \qquad (7.55)$$

Величина $\phi(\tau)$, расчитанная по формуле (7.55), называется *дюрацией Васичека* простой дисконтной облигации, она измеряет относительное изменение коэффициента дисконтирования в ответ на небольшое изменение мгновенной ставки при условии, что динамика последней описывается процессом (7.13) и невозможен арбитраж. Заметим, что для небольших сроков погашения различие между дюрацией Васичека и обычной дюрацией не столь существенно ($\phi(\tau)$ стремится к τ при $\tau\to 0$), но эта разница растет при увеличении τ (при $\tau\to\infty$ $\phi(\tau)$ стремится к $1/\alpha$).

Для инструмента с фиксированными платежами $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (t - сегодняшний момент, соответственно промежутки времени до каждой выплаты равны $\tau_1 = t_1 - t$, ..., $\tau_n = t_n - t$) дюрация Васичека будет равна

$$\mathcal{V} = \sum_{i=1}^{n} \phi(\tau_i) p(\tau_i) C_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} p(\tau_i) C_i \tag{7.56}$$

Если считать, что модель Васичека более адекватно описывает реальность по сравнению с моделью Мертона, то коэффициенты хеджирования должны рассчитываться на основании дюрации Васичека. Например, для портфеля, включающего активы A и B, соотношение стоимости позиций, страхующее от небольших сдвигов кривой доходности должно определяться как $h_v = Z_B P_B / Z_A P_A = -\mathcal{V}_A / \mathcal{V}_B$. В Примере 7.4 вернемся еще раз к рассматривавшейся в 5-й главе задаче определения коэффициента хеджирования.

Пример 7.4 Коэффициент хеджирования в модели Васичека

В Примере 5.1 5-й главы коэффициенты хеджирования рассчитывались с использованием показателей дюрации Маколея и Фишера-Вайля. Воспользуемся теми же данными для расчета дюрации Васичека и сответствующего коэффициента хеджирования. Для этого прежде всего необходимо оценить параметр α. Параметры модели Васичека x_∞, α и σ подберем таким образом, чтобы модель наиболе точно воспроизводила существующие цены на рынке ГКО-ОФЗ (сегодняшний день, как и прежде - 7.09.2001), минимизируя сумму квадратов отклонений теоретических цен от фактических. Получим

$$x_\infty = 0{,}1067\,,\ \alpha = 0{,}0535\,,\ \sigma = 0{,}0678\,,\ x = 0.1179\,.$$

Параметры рассматриваемых в Примере 5.1 облигаций серий 27004 и 27011 и результаты расчета дюрации Васичека приведены в таблице 7.4. Коэффициент хеджирования, в случае, когда позиция по облигации 27004 хеджируется облигацией 27011, равен

-0,909 / 1,702 = -0,534.

При расчете через дюрацию Фишера-Вайля (в Примере 5.1) коэффициент хеджирования равнялся -0,521. Разница (0,013) выглядит не слишком существенной (хотя, например, при объеме позиции 10 млн. руб., это 130 тыс. руб.), но она может быть значительно большей в случае более крутой формы кривой доходности (т.е., например, большей величины α).

Таблица 7.4 Расчет дюрации Васичека для ОФЗ-ФК серий 27004 и 27011 (на 7.09. 2001)

Дата	Время до платежа (лет)	Дюрация Васичека для простой дисконтной облигации	Коэффициент дисконтирования	Платежи и показатели дюрации	
				27004	*27011*
19.09.01	0,033	0,033	0,9961	5,0	

10.10.01	0,090	0,090	0,9892		3,7
19.12.01	0,282	0,280	0,9657	3,7	
09.01.02	0,340	0,337	0,9584		3,7
20.03.02	0,532	0,524	0,9338	3,7	
10.04.02	0,589	0,580	0,9263		3,7
19.06.02	0,781	0,765	0,9008	3,7	
10.07.02	0,838	0,820	0,8931		3,7
18.09.02	1,030	1,002	0,8670	103,7	
09.10.02	1,088	1,057	0,8591		2,5
08.01.03	1,337	1,290	0,8245		2,5
09.04.03	1,586	1,521	0,7897		2,5
09.07.03	1,836	1,748	0,7549		2,5
08.10.03	2,085	1,973	0,7201		102,5
			Дюрация Маколея	**0,934**	**1,533**
			Дюрация Фишера-Вайля	**0,933**	**1,794**
			Дюрация Васичека	**0,909**	**1,702**