VIII. Оценка

В настоящей главе рассматриваются некоторые из наиболее известных и практически используемых методов оценки процентных инструментов *с неопределенными платежами*, прежде всего - инструментов, обладающих свойствами опционов.

Принципы оценки

Прежде чем говорить о практических методах оценки процентных инструментов с неопределенными платежами, необходимо рассмотреть *принципы*, которые лежат в основе современных методов оценки финансовых активов, и соответствующие им ключевые понятия - прежде всего, так называемые *«нейтральные к риску вероятности»*.

Рассмотрим предельно упрощенный пример, позволяющий получить интуитивное представление о современных теориях оценки. Пусть разыгрывается *лотерея А*, предполагающая лишь *два* возможных исхода. Говоря языком теории вероятностей - существует только два возможных *состояния природы* - θ_1 и θ_2. Лотерея разыгрывается немедленно, т.е. влияние фактора времени игнорируется. В случае наступления первого возможного исхода играющий получает выигрыш в сумме 1000 долларов, при втором исходе - ничего. *Какой будет рыночная цена такой лотереи?*

Для ответа на этот вопрос важно иметь представление о шансах (вероятностях) каждого из исходов. Здесь кроется очевидная сложность. Если, к примеру, состояние природы определяется в результате подбрасывания правильной монеты, то вероятности известны (каждый исход имеет вероятность 0,5 или 50%). Но если на наступление того или иного состояния природы оказывает влияние множество случайных факторов, причем не обязательно известно - каких именно, - определить вероятности не так просто. Мы будем рассматривать вероятности как *степень уверенности* людей, принимающих решения, в наступлении того или иного состояния природы. Данная степень уверенности основывается, очевидно, на доступной *информации* о факторах, влияющих на наступление того или иного исхода, о том - какое влияние эти факторы могут иметь, и т.д. Предположим, что существует *общее мнение* участников рынка о вероятностях наступления каждого из возможных состояний природы[1], и эти вероятности равны соответствено $\mathbb{P}(\theta_1) = 0{,}01$, $\mathbb{P}(\theta_2) = 0{,}99$ (так как возможны только два состояния природы, то сумма их вероятностей, очевидно, должна равняться единице).

Если бы участники рынка были *нейтральны* по отношению к риску (для нейтрального к риску человека важен лишь размер *ожидаемого* дохода и не имеет значения риск), задача оценки стоимости лотереи была бы решена - стоимость равнялась бы ожидаемому выигрышу:

$$V_A = \mathbb{E}[\widetilde{C}_A] = 1000 \times \mathbb{P}(\theta_1) + 0 \times \mathbb{P}(\theta_2) = 10 + 0 = 10 \text{ долларов.}$$

(здесь: $\widetilde{C}_A$ - случайная величина выигрыша в лотерее A, $\mathbb{E}[\cdot]$ - оператор математического ожидания, отражающий мнение участников рынка о вероятностях наступления возможных исходов).

Люди в большинстве не нейтральны к риску, соответственно полученная оценка неверна, так как цена в реальности будет отражать отношение к риску участников рынка. Для решения задачи оценки можно использовать два способа. В соответствии с первым, необходимо сделать предположение о том, по каким *правилам* (в соответствии с какой *моделью*) люди выбирают решения в условиях *риска* - когда результат нельзя с точностью предугадать. Приемлемой (и общепринятой в экономике и финансах) моделью поведения людей является гипотеза ожидаемой полезности Неймана-Моргенштерна[2], в соответствии с которой субъект выбирает решения исходя из критерия наибольшей ожидаемой полезности результата. Применительно к нашему примеру, максимальная сумма денег, которую субъект, состояние (богатство) которого равно W, согласиться заплатить за участие в лотерее A, равна числу c_A, такому, что

$$\mathbb{E}[u(\widetilde{C}_A)] = \mathbb{P}(\theta_1)u(W + 1000) + \mathbb{P}(\theta_2)u(W + 0) = u(W + c_A),$$

где $u(\cdot)$ - функция полезности Неймана-Моргенштерна. Величина c_A является с точки зрения данного субъекта *достоверным* (*детерминирован-*

[1] Это звучит не вполне реалистично. На практике характеристики вероятностных распределений случайных факторов могут оцениваться на основании статистического анализа, либо - если применяется принцип *относительного ценообразования*, - информация о предполагаемых участниками рынка характеристиках вероятностных распределений извлекается из существующих рыночных цен.

[2] Впервые идея об ожидаемой полезности выдвинута Даниилом Бернулли еще в начале XVIII века (знаменитый «Санкт-Петербургский парадокс»). Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном (19) [ ] осуществлена строгая математическая формулировка данной теории.

ным) эквивалентом лотереи *A*. Достоверный эквивалент лотереи - это гарантированный выигрыш, который для данного субъекта эквивалентен участнию в лотерее.

Если $u(\cdot)$ есть функция полезности *типичного* участника рынка, то цена лотереи *A* на рынке будет равна величине достоверного эквивалента

$$V_A = c_A \ .$$

В этом состоит смысл подхода *абсолютного ценообразования* в моделях равновесия. Исходя из предположений о предпочтениях типичного инвестора (прежде всего - его функции полезности), цены финансовых инструментов определяются в состоянии равновесия - когда этот типичный инвестор (тем самым - все инвесторы на рынке) достиг наилучшего из возможных положения.

В нашем примере примем для простоты, что размер богатства не имеет значения[3] (будем считать $W = 0$), а функция полезности типичного участника рынка[4] выглядит как $u(w) = w^h$, $0 < h < 1$ (пусть, для определенности, $h = 0{,}5$). Тогда стоимость определится из соотношения:

$$0{,}01 \times 1000^{0{,}5} + 0{,}99 \times 0^{0{,}5} = c_A^{0{,}5} \ ,$$

откуда $V_A = c_A = 0{,}1$ долл. (стоимость меньше ожидаемого выигрыша, что говорит о несклонности к риску типичного инвестора). Если же параметр h равняется 0,9 (что означает существенно меньшую степень несклонности к риску), стоимость лотереи равна $V_A = 5{,}99$ долларов. Даже этот простейший пример показывает насколько чувствительны результаты, получаемые в рамках теорий равновесия к выбранным предположениям. Если бы существовала необходимость применения данной модели на практике, то параметр h следовало бы выбрать так, чтобы теоретические цены наиболее точно отражали те, которые реально наблюдаются на рынке. Однако это не обязательно удалось бы сделать с приемлемой точностью - например, сам вид функции полезности может препятствовать точному воспроизведения реальных ценовых структур (например, рассмотренная в предыдущей главе модель Васичека не всегда в состоянии воспроизвести реальную кривую доходности). Прежде всего по этой причине теории абсолютного ценообразования не всегда эффективны в решении практических задач.

Подход *относительного* ценообразования (арбитражные методы оценки) не требует почти никаких предположений о поведении инвестора. Счи-

[3] В этом случае говорят об *отсутствии эффекта богатства* - когда предпочтения человека, в частности его отношение к риску, не меняются в ответ на изменения размеров богатства.

[4] Стандартными предположениями относительно полезности является $u' > 0$ и $u'' < 0$, что означает снижение предельной полезности богатства при росте последнего и, тем самым, - несклонность к риску.

тается лишь, что инвесторы предпочитают больший доход меньшему. Стоимость финансовых инструментов определяется на основании (или *относительно*) цен тех инструментов, торговля которыми осуществляется на рынке и цены которых известны. В нашем примере предположим, что существует лотерея *B*, по которой, платежи составят: в состоянии θ_1 - 500 долларов, в состоянии θ_2 - 10 долларов. Лотерея *B* до момента розыгрыша активно продается и покупается на рынке по цене 12 долларов. *В данной рыночной цене содержится информация об отношении к риску типичного на данном рынке инвестора, а также, что не менее важно - информация о субъективных вероятностях возможных исходов*.

Для оценки лотереи *A* на основании информации о цене лотереи *B* используем следующий прием. Поставим вопрос: если бы все инвесторы были бы нейтральны по отношению к риску, какими должны быть вероятности возможных состояний природы, чтобы теоретическая цена лотереи *B* равнялась ее фактическому значению? При нейтральности к риску стоимость равна ожидаемому доходу, т.е. необходимо найти числа $\mathbb{P}_N(\theta_1)$ и $\mathbb{P}_N(\theta_2) = 1 - \mathbb{P}_N(\theta_1)$ такие, что:

$$V_B = 12 = \mathbb{E}_N[\widetilde{C}_B] = \mathbb{P}_N(\theta_1) \times 500 + \mathbb{P}_N(\theta_2) \times 10\ ,$$

откуда $\mathbb{P}_N(\theta_1) = 0{,}0040816$, $\mathbb{P}_N(\theta_2) = 0{,}9959284$. Числа $\mathbb{P}_N(\theta_1)$ и $\mathbb{P}_N(\theta_2)$ принято называть (возможно, не совсем удачно) *нейтральными к риску вероятностями*, $\mathbb{E}_N[\cdot]$ - это математическое ожидание, рассчитанное по нейтральным к риску вероятностям. Используя, содержащуюся в цене лотереи *B* информацию о нейтральных к риску вероятностях, можно оценить лотерею *A*. Ее рыночная цена также должна равняться ожидаемому выигрышу, рассчитанному по нейтральным к риску вероятностям, т.е.

$$V_A = \mathbb{E}_N[\widetilde{C}_A] = \mathbb{P}_N(\theta_1) \times 1000 + \mathbb{P}_N(\theta_2) \times 0\ ,$$

откуда $V_A = 4{,}0816$ долларов. Данная оценка справедлива *по отношению* к цене лотереи *B* (которая играет роль *нумерера*[5]), т.е. к реальной рыночной информации, что существенно более предпочтительно с практической точки зрения по сравнению со случаем, когда оценки определяются субъективными предположениями о закономерностях поведения участников рынка.

Еще один важнейший вывод: *если существуют нейтральные к риску вероятности, такие, что ожидаемые доходы по финансовым инструментам равняются их рыночным ценам, это означает, что на рынке невозможен арбитраж*. Покажем - почему это так, используя тот же пример с лотереями *A* и *B*.

[5] *Numeráire* (фр.) - единица измерения, эталон.

Арбитражный аргумент и полные рынки

Приведенное выше обоснование цены лотереи *A* может показаться не вполне убедительным. Для обоснования полученного результата можно использовать несколько другую аргументацию, причем в данном случае *знание вероятностей возможных состояний природы для оценки лотереи A не понадобится*. Достаточно знания, что выплаты по лотереям *A* и *B* зависят от одного и того же случайного фактора. Пусть данный случайный фактор (случайная величина, обозначим ее $\widetilde{X}$) может принимать, в зависимости от состояния природы, два значения: 1 либо 0. Тогда выплаты по лотереям *A* и *B* можно представить как $\widetilde{C}_A = 1000\widetilde{X}$, $\widetilde{C}_B = 10 + 490\widetilde{X}$. Создадим *портфель*, в который будет входить *одна* купленная лотерея *A* и *Z* штук лотерей *B*. Будем считать, что величина *Z* может быть как дробной, так и отрицательной (отрицательность означает, что инвестор *продает* данные лотереи). При реализации первого состояния природы портфель принесет инвестору выигрыш $1000 + 500Z$, в случае второго - $10Z$. Выберем Z^* таким образом, чтобы *риск отсутствовал*, т.е. результат не зависел бы от состояния природы, и выигрыш в первом случае был бы в точности равен выигрышу во втором:

$$1000 + 500Z^* = 10Z^*,$$

откуда $Z^* = -2{,}0408163$. Так как риска нет, если арбитраж невозможен (нельзя «получить деньги из ничего»), стоимость портфеля *до розыгрыша* должна равняться величине выигрыша[6]:

$$V_A + Z^* V_B = 1000 + 500Z^* = 10Z^*.$$

Если рыночная стоимость лотереи *B* известна: $V_B = 12$, то данное выражение дает возможность рассчитать стоимость лотереи *A*: $V_A = 4{,}0816$, что в точности равно результату, полученному выше с использованием нейтральных к риску вероятностей. Логика обоснования данного результата полностью аналогична тому, как было получено дифференциальное уравнение (7.12), определяющее стоимость простых дисконтных облигаций в однофакторных моделях временной структуры (Глава 7).

Применение арбитражного аргумента для оценки финансовых инструментов возможно если рынки являются *полными*. Последнее означает, что для *любого финансового инструмента* можно подобрать из присутствующих на рынке инструментов *хеджирующий портфель* так, что совокупная стоимость инвестиций (хеджируемый инструмент плюс хеджирующий портфель) не будет подвержена влиянию факторов риска. В нашем примере рынок является полным, так как выплаты по обоим лотереям (*A* и *B*) зави-

[6] Напомним, что в данном примере мы игнорируем фактор времени: после торговли лотереями *сразу же* происходит розыгрыш.

сят от одного и того же случайного фактора ($\widetilde{X}$), что позволило хеджировать покупку лотереи A с помощью продажи определенного количества (2,0408163 единиц) лотерей B.

Предположение о полноте рынков является ключевой слабостью и основным объектом критики арбитражного подхода к оценке. Если рынки не полны, что очень часто соответствует действительности, арбитражный подход неприменим, либо, что тоже самое, приводит к неправильным результатам.

Оценка финансовых инструментов

Рассмотренный выше пример - упрощенная карикатура, но он объясняет универсальный подход к оценке финансовых инструментов с неопределенными платежами. Прежде всего необходимо определить случайные факторы, влияющие на размеры платежей (и тем самым на стоимость инструмента) и закономерности (вероятностные законы), которым подвержены изменения данных факторов. Необходимо выбрать *нумерер* - актив, подверженный влиянию тех же факторов, рыночная цена которого известна или может быть вычислена. Необходимо определить нейтральные к риску вероятности и по данным вероятностям рассчитать ожидаемую стоимость доходов по оцениваемому инструменту. Сложность состоит в необходимости учитывать фактор времени: нужно расчитать *ожидаемую текущую стоимость неопределенных будущих доходов*. Альтернативный (но эквивалентный в смысле получаемых результатов) путь оценки - подобрать для оцениваемого инструмента хеджирующий портфель, полностью нейтрализующий риск, и определить стоимость исходя из отсутствия возможностей арбитража.

Пусть необходимо оценить финансовый инструмент, по которому через время T будет выплачен единственный платеж $\widetilde{C}$ (случайная величина), $V(t)$ - искомая стоимость инструмента на момент t (сегодня). Так как в момент T размер платежа будет известен, то $V(T) = \widetilde{C}$. Пусть выбран нумерер - актив, стоимость которого определяется теми же факторами, что и размер платежа $\widetilde{C}$, $\Pi(t)$ - стоимость нумерера в момент t. Тогда отношение стоимости оцениваемого инструмента и нумерера сегодня, и ожидаемое отношение данных стоимостей в будущем должны быть равны между собой:

$$\frac{V(t)}{\Pi(t)} = \mathrm{E}_N\left[\frac{\widetilde{C}}{\Pi(T)}\right], \tag{8.1}$$

$\mathbb{E}_N[\cdot]$ - математическое ожидание[7] по нейтральной к риску вероятностной мере $\mathbb{P}_N$. Тем самым, стоимость на момент t финансового инструмента, обеспечивающего случайный платеж $\widetilde{C}$ в момент T может быть записана как

$$V(t) = \mathbb{E}_N\left[\frac{\Pi(t)}{\Pi(T)}\widetilde{C}\right]. \qquad (8.1')$$

Случайный процесс, значение которого в будущем равно текущему значению (как в выражении (8.1)), называют *мартингалом*[8]. Вероятностная мера $\mathbb{P}_N$, эквивалентная[9] мере $\mathbb{P}$ («фактические» или «объективные» вероятности, описывающие реальный мир), для которой относительные цены финансовых активов являются мартингалами, называется эквивалентной мартингальной мерой (*ЭММ*). Если эквивалентная мартингальная мера существует (т.е. цены всех финансовых активов на рынке соответствуют (8.1)), это означает *отсутствие возможностей арбитража*. Если данная мера единственна - рынок является *полным*. Данные факты - краеугольные камни современных финансов.

Применение принципа оценки (8.1) прежде всего предполагает выбор нумерера[10]. По отношению к процентным инструментам чаще всего применяют два стандартных нумерера. Первый - стоимость простой дисконтной облигации, погашаемой в определенный будущий момент времени T_n

$$\Pi(t) = p(\tau_n), \quad \tau_n = T_n - t.$$

Второй стандартный выбор - стоимость одной денежной единицы, инвестированной в момент 0 и постоянно реинвестируемой по краткосрочной ставке - так называемый *счет денежного рынка*:

$$\Pi(t) = \exp\left(\int_0^t x_s \, \mathrm{d}s\right), \qquad (8.2)$$

[7] Здесь и далее речь идет об *условном* математическом ожидании, основанном на информации, доступной в момент t.

[8] Термин введен известным американским математиком Дж.Л.Дубом в начале 50-х гг. (Дуб (1953) [ ]), понятие мартингала очень широко применяется в финансах (в теориях оценки производных инструментов), начиная с 70-х. - 80- гг. (см. напр. Харрисон и Крепс (1979) [ ]).

[9] Упрощенно говоря, эквивалентность мер означает, что для одной и другой меры *невозможными* являются одни и те же события.

[10] Подчеркнем, что для конечного результата не важно - какой именно нумерер выбран. Важно, чтобы нумерер отвечал определенным стандартным условиям: он должен быть строго большим нуля и самофинансируемым, т.е. не должен предполагать никаких промежуточных выплат и дополнительных вложений. Стоимость нумерера должна зависеть от тех же факторов, что и стоимость оцениваемых инструментов.

x_s - краткосрочная ставка в момент s.

Если в качестве нумерера выбран счет денежного рынка, выражение (8.1) можно записать

$$V(t) = \mathbb{E}_N\left[\widetilde{C}\frac{\Pi(t)}{\Pi(T)}\right] = \mathbb{E}_N\left[\widetilde{C}\exp\left(-\int_t^T x_s\,\mathrm{d}\,s\right)\right]. \tag{8.3}$$

Если нумерер - стоимость дисконтной облигации (пусть время ее погашения $T_n = T$), получим

$$V(t) = \mathbb{E}_N\left[p(\tau)\widetilde{C}\right],\ \tau = T - t\,, \tag{8.4}$$

t - и в одном, и в другом случае, - момент, на который производится оценка. заметим, что в случае отсутствия неопределенности ($\widetilde{C} = C$ - детерминированная величина) выражение (8.12) представляет собой обычную формулу расчета текущей стоимости $V(t) = p(\tau)C = e^{-\chi(\tau)\tau}C$.

Применение принципов ценообразования проиллюстрируем на примере простейшего производного инструмента - европейского опциона.

Европейский опцион и формула Блэка-Шоулза

Европейский опцион - простейший вид опционного контракта, который может быть исполнен в оговоренный соглашением *момент* времени (в отличие от *американского* опциона, когда выполнение возможно на *протяжении* срока действия соглашения). В случае опциона *колл* владелец имеет *право*, *но не обязательство*, приобрести базовый актив по определенной цене (*цене выполнения*). Другими словами, в момент выполнения T европейский опцион колл обеспечивает его владельцу денежный поток (в расчете на одну единицу базового актива) в размере

$$C_C = \max(S(T) - X, 0)\,, \tag{8.5}$$

где $S(T)$ - цена базового актива на момент выполнения, X - цена выполнения опциона. Опцион *пут* означает право на продажу по цене X, и в момент выполнения денежный поток по нему составляет

$$C_P = \max(X - S(T), 0)\,. \tag{8.6}$$

В соответствии со знаменитой формулой Блэка-Шоулза (1973) [ ], если невозможен арбитраж, стоимость в момент t, исполняемого в момент T европейского опциона колл на актив, по которому не выплачиваются доходы, определяется как (примем $\tau = T - t$)

$$V_C(\tau) = S(t)\Phi(d) - p(\tau)X\Phi(d - \sigma\sqrt{\tau})\,, \tag{8.7}$$

где

$$d = \frac{\ln[S(t)/\,p(\tau)X] + \sigma^2\tau/2}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$S(t)$ - текущая цена базового актива, $p(\tau)$ - коэффициент дисконтирования для срока τ, $\Phi(\cdot)$ - функция стандартного нормального (гауссового) распределения. Стоимость европейского опциона пут связана со стоимостью опциона колл (по одному и тому же базовому активу с одинаковым сроком и ценой выполнения) условием *паритета*

$$V_P = V_C + p(\tau)X - S\,. \tag{8.8}$$

Ключевым предположением, лежащим в основе формулы (8.4), является логнормальное распределение цены базового актива (соответственно - нормальное распределение доходности), т.е динамика цены описывается процессом

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\omega\,, \tag{8.9}$$

где σ - стандартное отклонение мгновенного прироста цены (в годовом измерении), μ - ожидаемый мгновенный прирост цены, $\mathrm{d}\omega$ - стандартный винеровский процесс.

В модели Блэка-Шоулза единственным источником (фактором) неопределенности является цена базового актива S. Вероятности наступления различных состояний природы[11] определяются процессом (8.9), которому следует эта цена. Цена S, являясь единственным случайным фактором, выступает в данной модели и в роли *нумерера*. Еще одно предположение, лежащее в основе формулы Блэка-Шоулза - краткосрочная безрисковая ставка ставка является *постоянной*[12].

Существует различные возможности получить формулу (8.7). Один из них - воспользоваться предположением об отсутствии арбитражных возможностей. Составим портфель, состоящий из одного опциона колл и h единиц базового актива, тем самым стоимость портфеля будет равна $V_П = V_C + hS$. Так как цена базового актива выступает в качестве единственного случайного фактора, влияющего на стоимость опциона, используя лемму Ито прирост стоимости опциона за бесконечно малый интервал времени можем записать как

$$\mathrm{d}V_C = \left(\frac{\partial V_C}{\partial t} + \mu\frac{\partial V_C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V_C}{\partial S^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma\frac{\partial V_C}{\partial S}\mathrm{d}\omega\,.$$

---

[11] В *динамике*, под «состоянием природы» необходимо понимать *траекторию* развития мира (экономической системы).

[12] Горя более точно, предполагается то существует актив, цена которого изменяется в соотетствии с процессом $\mathrm{d}P/P = x\mathrm{d}t$, где x - константа.

Стоимость портфеля в целом будет, соответственно, описываться процессом

$$\mathrm{d}V_{\Pi} = \left(\frac{\partial V_C}{\partial t} + \mu \frac{\partial V_C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_C}{\partial S^2} + h\mu \right)\mathrm{d}\,t + \left(\sigma \frac{\partial V_C}{\partial S} + h\sigma \right)\mathrm{d}\,\omega\,.$$

Величину h подберем таким образом, чтобы доходность портфеля была детерминированной - для этого необходимо, чтобы выражение в скобках при $\mathrm{d}\omega$ равнялось нулю, т.е. $h = -\partial V_C / \partial S$. Невозможность арбитража означает, что доходность любого безрискового портфеля должна равняться безрисковой процентной ставке x: $\mathrm{d}V_{\Pi} / V_{\Pi} = x\mathrm{d}t$, откуда

$$\frac{\partial V_C}{\partial t} + xS \frac{\partial V_C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_C}{\partial S^2} = xV_C\,. \tag{8.10}$$

Данное соотношение называют формулой Блэка-Шоулза, ему подчиняется стоимость *любого* финансового инструмента, зависящего от случайного фактора S, в случае когда динамика последнего описывается законом (8.9), а безрисковая ставка постоянна. Решением дифференциального уравнения (8.10) с предельным условием $V_C(T,T) = \max(S(T) - X, 0)$ будет формула Блэка-Шоулза (8.7) для европейского опциона.

Альтернативный способ получить формулу Блэка-Шоулза - взять математическое ожидание в выражении (8.4). Исходя из предположения, что безрисковая ставка является постоянной, получим

$$V_C = e^{-x\tau}\,\mathbb{E}_N[\max(S(T) - X, 0)]\,. \tag{8.11}$$

Динамика цены S согласно предположениям модели описывается процессом (8.9). Но данный закон описывает реальный мир, в котором инвесторы несклонны к риску, в то время как ожидаемая величина в (8.11) рассчитывается по нейтральным к риску вероятностям. В нейтральном к риску мире инвесторов интересует только лишь ожидаемый доход, поэтому ожидаемая мгновенная доходность всех активов будет равна безрисковой ставке x. Это означает что в условиях нейтральных к риску вероятностей динамика S должна описываться процессом

$$\mathrm{d}S = xS\,\mathrm{d}\,t + \sigma S \mathrm{d}\omega_N\,,$$

следовательно, цена базового актива в момент T распределена логарифмически нормально, т.е. $\ln S(T)$ - нормально распределенная случайная величина со средним $\ln S + (r - \sigma^2/2)\tau$ ($S \equiv S(t)$ - текущее значение цены базового актива) и дисперсией $\sigma^2\tau$. Выражение (8.11) в этом случае можно преобразовать к виду

$$V_C = \frac{e^{-x\tau}}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln X}^{\infty} (e^s - X)\exp\left(-\frac{(s - \ln S - x\tau + \sigma^2\tau/2)^2}{2\sigma^2\tau} \right)\mathrm{d}\,s\,,$$

откуда, взяв интеграл, получим формулу Блэка-Шоулза (8.7).

Формула Блэка-Шоулза не может быть применена к оценке опционов по процентным инструментам, прежде всего потому, что процесс (8.9) неверно описывает динамику цены базового актива. Например, если речь идет об опционе на простую дисконтную облигацию, ожидаемый прирост цены μ и волатильность σ не могут быть константами. Облигация имеет определенный момент погашения (время, когда будет выплачен номинал), следовательно волатильность по мере приближения к моменту погашения должна снижаться. Кроме того, доходность облигации за краткосрочный промежуток времени подвержена влиянию колебаний краткосрочной ставки, которая сама по себе есть случайная величина.

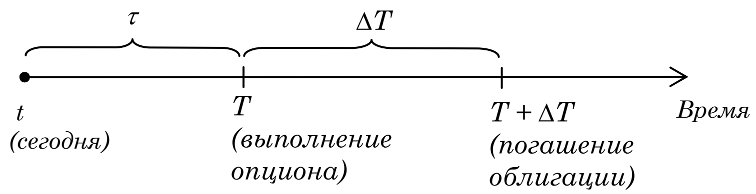
Формула Блэка

Модель Блэка (1976) [ ], не менее известная, чем формула Блэка-Шоулза, является вариантом формулы (8.4) для *опциона на форвардный контракт* по определенному базовому активу. Опцион колл на форвардный контракт есть право заключить в момент T (время выполнения опциона) контракт на приобретение в будущий момент $T+\Delta T$ базового актива по фиксированной цене X. Платеж (в момент выполнения) по опциону колл на форвардный контракт равен

$$C_C = \max(F(T) - X, 0) , \qquad (8.12)$$

где $F(T)$ - форвардная цена (с поставкой во время $T+\Delta T$) в момент выполнения опциона.

Опцион по простой дисконтной облигации может быть представлен как опцион на форвардный контракт, если рассматривать в качестве базовой переменной форвардную цену облигации: если $T+\Delta T$ - время погашения облигации, то колл-опцион есть право купить в момент T по цене X одну денежную единицу, которая будет выплачена в момент $T+\Delta T$.



Если считать форвардную цену облигации единственным источником риска и предположить, что она распределена логнормально с постоянной волатильностью и нулевым смещением, т.е.

$$\frac{\mathrm{d}F}{F} = \sigma\,\mathrm{d}\,\omega ,$$

то такой опцион можно оценить аналогично формуле (8.4). К формуле Блэка для опциона колл на простую дисконтную облигацию можно перейти заменив в формуле Блека-Шоулза цену S на $e^{-x\tau}F$ (как и в модели Блэка-Шоулза безрисковая краткосрочная ставка x считается постоянной)

$$V_C(\tau) = e^{-x\tau}\left(F\Phi(d) - X\Phi(d - \sigma\sqrt{\tau})\right), \tag{8.13}$$

$$d = \frac{\ln(F/X) + \sigma^2\tau/2}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Стоимость опциона пут в модели Блэка может быть определена по условию паритета

$$V_P = V_C + e^{-x\tau}(X - F). \tag{8.14}$$

Модель Блэка, несмотря на определенные недостатки, является рыночным стандартом определения цен простых европейских опционов. В следующей главе будут рассмотрены особенности ее практического применения по отношению к реальным рыночным инструментам.

Оценка на основании модели временной струтуры

Модель Блэка не основывается на каких-либо явных предположениях о временной структуре процентных ставок. Само по себе это не является недостатком если речь идет, например, об оценке опционов на форвардные контракты по реальным активам (сырьевым, сельскохозяйственным, металлам, и т.д.) Но у процентных и инструментов есть существенные особенности. Финансовая структура облигации (сроки до следующих выплат) меняется со временем, колебания процентных ставок влияют не только на стоимость опциона, но и на стоимость базового актива. Если для опционов европейского типа эти проблемы менее важны, либо могут быть без существенных потерь преодолены в рамках модели Блэка, то для американских опционов данный подход неприменим. Американский опцион может быть исполнен в любой момент на протяжении срока своего действия. Будет он исполнен или нет (т.е. выгодно или нет исполнение его владельцу) зависит не только от форвардной цены, но и от колебаний текущих процентных ставок. В модели Блэка, где единственным фактором риска является форвардная цена, а процентные ставки на протяжении срока до выполнения опциона считаются постоянными, это учесть невозможно. Это вызывает необходимость использования для оценки производных процентных инструментов *моделей временной структуры процентных ставок* (примеры которых рассматривались в предыдущей главе).

Подходы к определению цены финансового инструмента с неопределенными платежами на основании моделей временной структуры аналогичны тем, которые использованы при выведении формулы Блэка-Шоулза. Первый возможный подход - расчет математического ожидания по нейтральным к риску вероятностям в соответствии с формулами (8.3) либо (8.4). Сложностью здесь является то, что в отличие от моделей Блэка-Шоулза и Блэка динамика мгновенной ставки (как и цен простых дисконтных облигаций) является случайным процессом, коррелированным со стоимостью оцениваемого инструмента. Поэтому аналитически взять соответствующее математическое ожидание можно только в простых моделях и для простых инструментов. В то же время можно рассчитывать данные математические ожидания численными методами - соответствующие примеры будут рассмотрены ниже. Второй возможный подход - решение дифференциального уравнения, подобного уравнению Блэка-Шоулза (8.10). Оба подхода эквивалентны с точки зрения результатов. Например, пусть мгновенная ставка и стоимость инструмента, который необходимо оценить (случайный платеж $\widetilde{C}$ в момент T), зависят от одного случайного фактора Z, динамика которого при нейтральных к риску вероятностях описывается процессом

$$\mathrm{d}Z = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\omega_N\,,$$

(μ и σ могут в общем случае быть функциями времени и текущего значения величины Z). Тогда (8.3) эквивалентно дифференциальному уравнению Фейнмана-Каца[13]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mu\frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} - xV = 0 \tag{8.15}$$

с предельным условием $V(T) = \widetilde{C}(T)$. Легко увидеть, что уравнение (8.10) является частным случаем уравнения Фейнмана-Каца для специфических предположений модели Блэка-Шоулза. Уравнение (8.15) также далеко не всегда можно решить аналитически, поэтому может возникать необходимость применения приближенных численных методов.

Европейский опцион в однофакторных моделях

В рамках многих однофакторных моделей стоимость простых производных инструментов, таких как европейские опционы, может быть найдена аналитически. Наличие явного решения чрезвычайно удобно с точки зрения практического использования - стоимость определяетя однозначно, результат не зависит от точности численных методов и не требует громоздких вычислений. По мнению многих практиков, явные аналитические решения следует использовать всегда, когда это возможно, при условии, что

[13] Аналогичное уравнение (7.12) получено в предыдущей главе для случая, когда мгновенная ставка сама является единственым случайным фактором.

это не идет в ущерб реалистичности получаемых результатов (самое красивое аналитическое решение будет неприемлемым если лежащая в его основе модель неверно воспроизводит фактические рыночные цены).

Рассмотрим Европейский опцион колл на простую дисконтную облигацию. Предположим, что мгновенная ставка x - единственный случайный фактор, влияющий на временную структуру, следует процессу Орнштейна-Улинбека с постоянными параметрами: $\mathrm{d}x = \alpha(\mu - x)\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\omega$ (α, μ и σ - константы). Соответствующий процесс при нейтральных к риску вероятностях будет иметь вид

$$\mathrm{d}x = [\alpha(\mu - x) - \lambda\sigma]\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\omega_N\,. \tag{8.16}$$

Стоимость опциона колл V_C (как и стоимость любого инструмента, находящегося под влиянием исключительно времени и ставки x) будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial V_C}{\partial t} + [\alpha(\mu - x) - \lambda\sigma]\frac{\partial V_C}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V_C}{\partial x^2} - xV_C = 0\,. \tag{8.17}$$

Предельным условием для опциона на приобретение в момент T простой дисконтной облигации, погашаемой в момент $T + \Delta T$ будет

$$V_C(T,T) = \max(p(T,T+\Delta T) - X, 0)\,, \tag{8.18}$$

где X - цена выполнения опциона. Явное выражение для опциона колл в модели Васичека получено Джамшидианом (1989) [ ]:

$$V_C = p(t,T+\Delta T)\Phi(d) - p(t,T)X\Phi(d - v)\,, \tag{8.19}$$

где

$$d = \frac{1}{v}\ln\left[\frac{p(t,T+\Delta T)}{p(t,T)X}\right] + \frac{v}{2}\,, \tag{8.20}$$

$$v = \sigma\phi(\Delta T)\left(\frac{1 - e^{-2\alpha\tau}}{2\alpha}\right)^{1/2},\ \tau = T - t\,,\ \phi(s) = \frac{1 = e^{-\alpha s}}{\alpha}\,. \tag{8.21}$$

Формула (8.19) справедлива для стоимости опциона и в расширенной версии модели Васичека (модели Халла-Уайта) - для случая, когда равновесное значение мгновенной ставки μ является функцией времени, - отличием будет только способ определения цен простых дисконтных облигаций (см. соотношения (7.19) и (7.42) в предыдущей главе).

Выражение (8.19) также определяет цену европейского опциона колл для моделей Мертона и Хо-Ли, отличаются только параметры d и v: